

# ĐÁNH THỨC TÀI NĂNG TOÁN HỌC

**MATHS OLYMPIAD – THE NEXT LAP**

*Terry Chew*

Hoàng Nam Thắng dịch

**07** 14-15 tuổi

**Đánh thức tài năng toán học - 7**  
**Maths Olympiad - The Next Lap**

**ALL RIGHTS RESERVED**

Previous edition copyright © *Online Education Group LLC, Los Angeles, 2016*

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior permission of the publishers.

ISBN: 978-604-62-3411-4

Printed in Vietnam

Đánh quyền tiếng Việt thuộc về Công ty Cổ phần Trẻ em Giáo dục Tài năng, xuất bản theo hợp đồng chuyển nhượng bản quyền giữa Singapore Asia Publishers Pte Ltd và Công ty Cổ phần Trẻ em Giáo dục Tài năng, năm in ấn: 2016.

Đánh quyền bản phiên đã được bản in, mọi hình thức tái bản, sao chép, phân phối dưới dạng in ấn, văn bản điện tử, âm thanh là phạm vi vi phạm bản quyền mà không được sự cho phép của đơn vị sở hữu bản quyền là nhà in và phạm vi phân phối quyền và hạn chế tập thể là vi phạm bản quyền. Mọi vi phạm bản quyền sẽ bị xử lý theo pháp luật. Không sao chép, không tái bản, không phân phối.

**ĐƠN VỊ PHÁT HÀNH:**

Công ty Cổ phần Giáo dục Tài năng

Địa chỉ: Số 1, Ngõ 814, Đường Lương, Phường Lương Thượng, Quận Đống Đa, TP. Hà Nội

Điện thoại: (84) 8882 8882

Hotline: 097 991 9026

Website: <http://tun.vn>

<http://tun.gutenberg.com.vn>

**MỤC LỤC**

Foreword.....	4
Lời nói đầu.....	5
Chapter 1: Permutation and Combination.....	6
Chương 1: <i>Chỉnh hợp và Tổ hợp</i> .....	7
Chapter 2: Observation and Induction.....	30
Chương 2: <i>Quan sát và Quy nạp</i> .....	31
Chapter 3: Other Operations.....	54
Chương 3: <i>Các phép toán khác</i> .....	55
Chapter 4: Numbering System.....	72
Chương 4: <i>Hệ đếm</i> .....	73
Chapter 5: Basics of Probability.....	96
Chương 5: <i>Nền móng cơ bản</i> .....	97
Chapter 6: Lines and Angles.....	120
Chương 6: <i>Đường thẳng và góc</i> .....	121
Chapter 7: Triangles.....	146
Chương 7: <i>Tam giác</i> .....	147
Chapter 8: Pythagorean Theorem.....	174
Chương 8: <i>Định lý Pytago</i> .....	175
Chapter 9: Profit, Loss.....	202
Chương 9: <i>Lợi nhuận và thua lỗ</i> .....	203
Chapter 10: Area.....	218
Chương 10: <i>Diện tích</i> .....	219
Chapter 11: Pigeonhole Principle.....	244
Chương 11: <i>Nguyên lý chuồng bồ câu</i> .....	245
Solutions.....	264

Permutation is a form of arrangement that chooses  $r$  items from a total of  $n$  items and arranges them according to specified requirements.

In general, there are  $r$  number of ways to select 1 from a number of items for the first consideration of position. There will then be  $(r - 1)$  ways for the second position. It follows that there are  $(r - 2)$  ways for the third position and so on. We can write, for selecting  $r$  items from a total of  $n$  items for arrangement,

$${}^n P_r = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$$

where  ${}^n P_r$  is the notation for permutation. For example,

$$\begin{aligned} {}^{10} P_4 &= 10 \times (10 - 1)(10 - 2)(10 - 3) \\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \\ &= 5040 \end{aligned}$$

Combination, on the other hand, is an arrangement of items regardless of position or order. Suppose we have  $n$  items and want to find out how many ways there are to group these items, with each group consisting of  $r$  items, the first step is to find  ${}^n P_r$ . Next, to select  $r$  items for grouping, we write  ${}^n C_r$ . Among each group of items, we can further arrange them into  ${}^r P_1$  ways. We have

$${}^n P_r = {}^n C_r \cdot {}^r P_1$$

$${}^n C_r = \frac{{}^n P_r}{{}^r P_1} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - r + 1)}{r!}$$

For illustration purpose, suppose we want to know how many triangles can be drawn by connecting any 3 points out of 12 points on a circle, we have

$$\begin{aligned} {}^{12} C_3 &= \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 220 \text{ triangles} \end{aligned}$$

To find out the number of quadrilaterals, we have

$$\begin{aligned} {}^{12} C_4 &= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 495 \text{ quadrilaterals} \end{aligned}$$

Chỉnh hợp là một cách sắp xếp  $r$  phần tử được chọn từ một tổng  $n$  phần tử theo một thứ tự nhất định.

Nhìn chung, có  $r$  cách để chọn từ  $n$  phần tử trong lần sắp xếp đầu tiên. Sau đó, có  $(r - 1)$  cách sắp xếp cho lần thứ 2. Tiếp đó là  $(r - 2)$  cách cho lần thứ ba, và cứ thế. Với việc chọn  $r$  phần tử từ một tổng  $n$  phần tử để sắp xếp, ta có thể viết,

$${}^n P_r = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$$

Với  ${}^n P_r$  là ký hiệu của chỉnh hợp. Ví dụ,

$$\begin{aligned} {}^{10} P_4 &= 10 \times (10 - 1)(10 - 2)(10 - 3) \\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \\ &= 5040 \end{aligned}$$

Trong khi đó, tổ hợp là việc sắp xếp các phần tử mà không phân biệt vị trí, thứ tự của các phần tử đó. Giả sử, ta có  $n$  phần tử và muốn tìm xem có bao nhiêu cách để tập hợp các phần tử đó, với mỗi tập hợp gồm  $r$  phần tử, bước đầu tiên ta phân tích  ${}^n P_r$ . Tiếp theo, để chọn  $r$  phần tử cho tập hợp, ta viết  ${}^n C_r$ . Trong mỗi tập hợp phần tử, ta có thể sắp xếp chúng theo  ${}^r P_1$  cách. Ta có

$${}^n P_r = {}^n C_r \cdot {}^r P_1$$

$${}^n C_r = \frac{{}^n P_r}{{}^r P_1} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - r + 1)}{r!}$$

Để minh họa, giả sử ta muốn biết có bao nhiêu tam giác có thể lập được bằng cách nối 3 trong số 12 điểm nằm trên một đường tròn, ta có

$$\begin{aligned} {}^{12} C_3 &= \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 220 \text{ tam giác} \end{aligned}$$

Để tìm số tứ giác, ta có

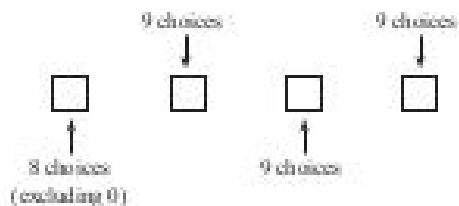
$$\begin{aligned} {}^{12} C_4 &= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 495 \text{ tứ giác} \end{aligned}$$

### Example 1

4 digits are selected from 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 and 8 each time to form a 4-digit number.

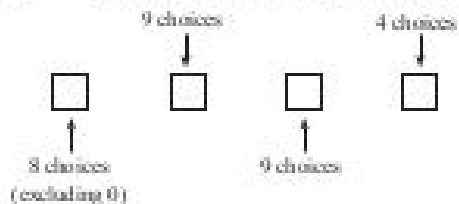
- (a) How many such numbers are there?  
(b) How many of these numbers are odd?

**Solution:** (a) Let us use 4 boxes to represent each number. Since the digits can be repeated, we have



$$8 \times 9 \times 9 \times 9 = 5832 \text{ numbers}$$

- (b) We have 1, 3, 5, 7 to choose from in the ones digit.



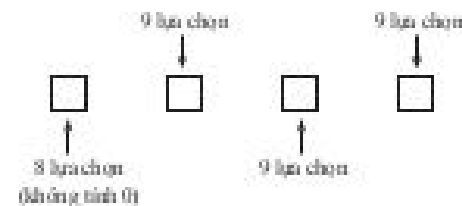
$$8 \times 9 \times 9 \times 4 = 2592 \text{ numbers}$$

### Ví dụ 1

Mỗi lần chọn 4 chữ số từ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 và 8 để tạo thành một số có 4 chữ số.

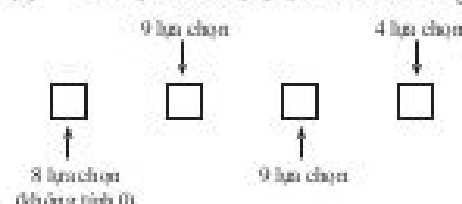
- (a) Hỏi ta lập được bao nhiêu số như vậy?  
(b) Trong đó có bao nhiêu số lẻ?

**Lời giải:** (a) Ta lấy 4 ô vuông để đại diện cho từng số. Vì các chữ số có thể lặp lại, nên ta có



$$8 \times 9 \times 9 \times 9 = 5832 \text{ số}$$

- (b) Ta chọn các số 1, 3, 5, 7 cho chữ số hàng đơn vị.



$$8 \times 9 \times 9 \times 4 = 2592 \text{ số}$$