LANTABRA

ĐÁNH THỨC TÀI NĂNG TOÁN HỌC

MATHS OLYMPIAD – THE NEXT LAP

Terry Chew

Hoàng Nam Thắng *dịch*

07 14-15 tuổi

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đánh thức tài năng toán học - 7
Maths Olympiad - The Next Lap

ISBN: 978 - 604 - 62 - 5151 - 4
Printed in Viet Nam

ĐƠN VỊ PHÁT HÀNH:
Công ty Cổ phần Giáo dục Sivina
Địa chỉ: Số 1, Ngõ 314, Đường Láng, Phường Láng Thượng, Quận Đống Đa, TP. Hà Nội
Điện thoại: (04) 8562 5555
Hotline: 097 991 9026
Website: http://lantabra.vn
http://hocgioitoan.com.vn

MỤC LỤC

1 PERMUTATION AND COMBINATION

Permutation is a form of arrangement that chooses r items from a total of n items and arranges them according to specified requirements.

In general, there are r number of ways to select from n number of items for the first consideration of position. There will then be $(r - 1)$ ways for the second position. It follows that there are $(r - 2)$ ways for the third position and so on. We can write, for selecting r items from a total of n items for arrangement,

$${}^{n}P_{r} = r(r-1)(r-2)\ldots(n-r+1)$$

where ${}^{n}P_{r}$ is the notation for permutation. For example,

$$\begin{aligned}{}^{10}P_{4} &= 10 \times (10-1)(10-2)(10-3)\\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7\\ &= 5040\end{aligned}$$

Combination, on the other hand, is an arrangement of items regardless of position or order. Suppose we have n items and want to find out how many ways there are to group these items, with each group consisting of r items, the first step is to find ${}^{n}P_{r}$. Next, to select r items for grouping, we write ${}^{n}C_{r}$. Among each group of items, we can further arrange them into ${}^{r}P_{r}$ ways. We have

$${}^{n}P_{r} = {}^{n}C_{r} \cdot {}^{r}P_{r}$$

$${}^{n}C_{r} = \frac{{}^{n}P_{r}}{{}^{r}P_{r}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

For illustration purpose, suppose we want to know how many triangles can be drawn by connecting any 3 points out of 12 points on a circle, we have

$$\begin{aligned}{}^{12}C_{3} &= \frac{12 \times 11 \times 11}{3 \times 2 \times 1}\\ &= 220 \text{ triangles}\end{aligned}$$

To find out the number of quadrilaterals, we have

$$\begin{aligned}{}^{12}C_{4} &= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1}\\ &= 495 \text{ quadrilaterals}\end{aligned}$$

1 CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

Chỉnh hợp là một cách sắp xếp r phần tử được chọn từ một tổng n phần tử theo một thứ tự nhất định.

Nhìn chung, có r cách để chọn từ n phần tử trong lần sắp xếp đầu tiên. Sau đó, có $(r - 1)$ cách sắp xếp cho lần thứ 2. Tiếp đó là $(r - 2)$ cách cho lần thứ ba, và cứ thế. Với việc chọn r phần tử từ một tổng n phần tử để sắp xếp, ta có thể viết,

$${}^{n}P_{r} = r(r-1)(r-2)\ldots(n-r+1)$$

Với ${}^{n}P_{r}$ là kí hiệu của chỉnh hợp. Ví dụ,

$$\begin{aligned}{}^{10}P_{4} &= 10 \times (10-1)(10-2)(10-3)\\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7\\ &= 5040\end{aligned}$$

Trong khi đó, tổ hợp là việc sắp xếp các phần tử mà không phân biệt vị trí, thứ tự của các phần tử đó. Giả sử, ta có n phần tử và muốn tìm xem có bao nhiêu cách để tập hợp các phần tử đó, với mỗi tập hợp gồm r phần tử, bước đầu tiên ta phải tính ${}^{n}P_{r}$. Tiếp theo, để chọn r phần tử cho tập hợp, ta viết ${}^{n}C_{r}$. Trong mỗi tập hợp phần tử, ta có thể sắp xếp chúng theo ${}^{r}P_{r}$ cách. Ta có

$${}^{n}P_{r} = {}^{n}C_{r} \cdot {}^{r}P_{r}$$

$${}^{n}C_{r} = \frac{{}^{n}P_{r}}{{}^{r}P_{r}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

Để minh hoạ, giả sử ta muốn biết có bao nhiêu tam giác có thể lập được bằng cách nối 3 trong số 12 điểm nằm trên một đường tròn, ta có

$$\begin{aligned}{}^{12}C_{3} &= \frac{12 \times 11 \times 11}{3 \times 2 \times 1}\\ &= 220 \text{ tam giác}\end{aligned}$$

Để tìm số tứ giác, ta có

$$\begin{aligned}{}^{12}C_{4} &= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1}\\ &= 495 \text{ tứ giác}\end{aligned}$$

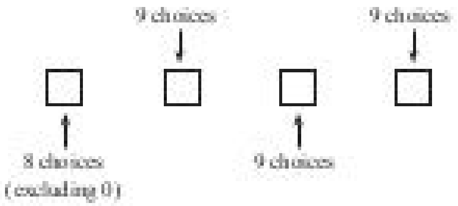
Example 1

4 digits are selected from 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 and 8 each time to form a 4-digit number.

(a) How many such numbers are there?

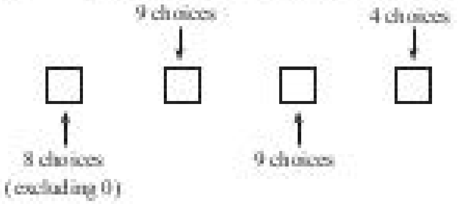
(b) How many of these numbers are odd?

Solution: (a) Let us use 4 boxes to represent each number. Since the digits can be repeated, we have



$8 \times 9 \times 9 \times 9 =$ **5832** numbers

(b) We have 1, 3, 5, 7 to choose from in the ones digit.



$8 \times 9 \times 9 \times 4 =$ **2592** numbers

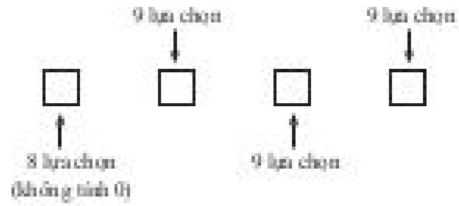
Ví dụ 1

Mỗi lần chọn 4 chữ số từ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 và 8 để tạo thành một số có 4 chữ số.

(a) Hỏi ta lập được bao nhiêu số như vậy?

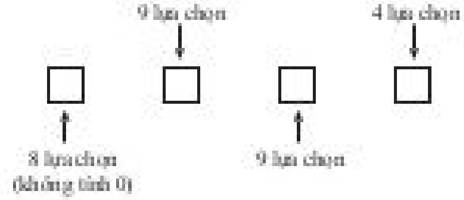
(b) Trong đó có bao nhiêu số lẻ?

Lời giải: (a) Ta lấy 4 ô vuông để đại diện cho từng số. Vì các chữ số có thể lặp lại, nên ta có



$8 \times 9 \times 9 \times 9 =$ **5832** số

(b) Ta chọn các số 1, 3, 5, 7 cho chữ số hàng đơn vị



$8 \times 9 \times 9 \times 4 =$ **2592** số