1 SỐ TỰ NHIÊN

Kỹ thuật quan trọng nhất và phức tạp nhất mà chúng ta sẽ được học trong chương này là khả năng biểu diễn số, ta viết số tự nhiên có 4 chữ số dưới dạng sau:

$$1000a + 100b + 10c + d.$$

Tính hữu dụng của phép biểu diễn số đơn giản này có thể giúp chúng ta đánh giá và giải quyết một tập hợp các bài toán đặc biệt như Ví dụ 3, Ví dụ 4 và Bài tập 10 trong chương này.

Một loại bài tập khác là nhân hai số có rất nhiều chữ số, thường sử dụng một nhận thức đơn giản ( ) để giải quyết bài toán. Khái niệm trên được thể hiện trong Ví dụ 2.

Cuối cùng, chúng ta sẽ học cách đơn giản hóa cách tính tổng hoặc hiệu của hai biểu thức tích qua việc tìm các thừa số. Kỹ thuật này được minh họa trong Ví dụ 1 và Bài tập 7.

VÍ DỤ

1 $999\,999 \times 222\,222 + 333\,333 \times 333\,334 = ?$

Cách giải: $999\,999 \times 222\,222 + 333\,333 \times 333\,334$

$= 333\,333 \times 3 \times 222\,222 + 333\,333 \times 333\,334$

$= 333\,333 \times 666\,666 + 333\,333 \times 333\,334$

$= 333\,333 \times (666\,666 + 333\,334)$

$= 333\,333 \times 1\,000\,000$

= 333 333 000 000

1 Whole Numbers

The most important and sophisticated technique that we will learn from this chapter is to be able to express, say, *abcd*, which denotes a 4-digit number, in the form of

$$1000a + 100b + 10c + d.$$

The usefulness of this simple expression is to help us solve and appreciate a unique set of mathematical problems such as Example 3, Example 4 and Question 10 in this chapter.

The other category of mathematical problems, namely multiplication of two extremely long string of numbers, uses a simple concept ($10 - 1 = 9$) for problem-solving. This concept is demonstrated in Example 2.

Last but not least, we will learn to simplify the computation of the sum or difference of two sets of products through skilful factorisation. Example 1 and Question 7 illustrate this technique.

EXAMPLES

1 $999\,999 \times 222\,222 + 333\,333 \times 333\,334 = ?$

Solution: $999\,999 \times 222\,222 + 333\,333 \times 333\,334$

$= 333\,333 \times 3 \times 222\,222 + 333\,333 \times 333\,334$

$= 333\,333 \times 666\,666 + 333\,333 \times 333\,334$

$= 333\,333 \times (666\,666 + 333\,334)$

$= 333\,333 \times 1\,000\,000$

= 333 333 000 000

2 Tìm tổng tất cả các chữ số của phép nhân $\underbrace{333\ldots333}_{2008 \text{ chữ số } 3} \times \underbrace{666\ldots666}_{2008 \text{ chữ số } 6}$

Phân tích: Chúng ta không thể tiến hành nhân trực tiếp 2 số lớn như vậy. Toàn bộ thủ thuật để giải quyết bài toán này nằm ở mối quan hệ đơn giản sau: 10 – 1 = 9.

Cách giải:

$$\underbrace{333\ldots333}_{2008 \text{ chữ số } 3} \times \underbrace{666\ldots666}_{2008 \text{ chữ số } 6}$$

$$= \underbrace{333\ldots333}_{2008 \text{ chữ số } 3} \times 3 \times \underbrace{222\ldots222}_{2008 \text{ chữ số } 2}$$

$$= \underbrace{999\ldots999}_{2008 \text{ chữ số } 9} \times \underbrace{222\ldots222}_{2008 \text{ chữ số } 2}$$

$$= (\underbrace{1000\ldots000}_{2008 \text{ chữ số } 0} - 1) \times \underbrace{222\ldots222}_{2008 \text{ chữ số } 2}$$

$$= \underbrace{222\ldots222}_{2008 \text{ chữ số } 2}\underbrace{000\ldots000}_{2008 \text{ chữ số } 0} - \underbrace{222\ldots222}_{2008 \text{ chữ số } 2}$$

$$= \underbrace{222\ldots222}_{2007 \text{ chữ số } 2}\ 1\ \underbrace{777\ldots778}_{2007 \text{ chữ số } 7}$$

2 + 7 = 9 (có 2007 cặp chữ số có tổng bằng 9 như vậy)

1 + 8 = 9 (có thêm 1 cặp chữ số có tổng bằng 9)

2008 × 9 = 18 072

Tổng tất cả các chữ số của số $\underbrace{333\ldots333}_{2008 \text{ chữ số } 3} \times \underbrace{666\ldots666}_{2008 \text{ chữ số } 6}$ là **18 072**.

3 Tổng tất cả các chữ số của một số tự nhiên có 3 chữ số là 21. Chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục. Nếu đổi chỗ chữ số hàng đơn vị và chữ số hàng trăm ta sẽ nhận được một số tự nhiên mới lớn hơn số ban đầu 198 đơn vị. Tìm số đã cho.

Phân tích: Không quá khó để nhận thấy rằng: 876 – 678 = 198. Suy ra đáp số của bài toán là 876 – 678 = 198. Câu hỏi đặt ra là liệu đây có phải là đáp số duy nhất của bài toán hay không?

Cách giải: $100a + 10b + c = \overline{abc}$ —— (1)

Đổi chỗ chữ số hàng đơn vị và chữ số hàng trăm, ta nhận được số mới:

$100c + 10b + a$ —— (2)

(2) – (1)

2 Find the sum of all the digits of $\underbrace{333\ldots333}_{2008\ 3\text{s}} \times \underbrace{666\ldots666}_{2008\ 6\text{s}}$.

Analysis: It is not possible to multiply two numbers of such magnitude. The whole trick to this question lies in a simple relationship: 10 – 1 = 9.

Solution:

$$\underbrace{333\ldots333}_{2008\ 3\text{s}} \times \underbrace{666\ldots666}_{2008\ 6\text{s}}$$

$$= \underbrace{333\ldots333}_{2008\ 3\text{s}} \times 3 \times \underbrace{222\ldots222}_{2008\ 2\text{s}}$$

$$= \underbrace{999\ldots999}_{2008\ 9\text{s}} \times \underbrace{222\ldots222}_{2008\ 2\text{s}}$$

$$= (\underbrace{1000\ldots000}_{2008\ 0\text{s}} - 1) \times \underbrace{222\ldots222}_{2008\ 2\text{s}}$$

$$= \underbrace{222\ldots222}_{2008\ 2\text{s}}\underbrace{000\ldots000}_{2008\ 0\text{s}} - \underbrace{222\ldots222}_{2008\ 2\text{s}}$$

$$= \underbrace{222\ldots222}_{2007\ 2\text{s}}\ 1\ \underbrace{777\ldots778}_{2007\ 7\text{s}}$$

2 + 7 = 9 (there are 2007 pairs of 9)

1 + 8 = 9 (there is one more pair of 9)

2008 × 9 = 18 072

The sum of all the digits of $\underbrace{333\ldots333}_{2008\ 3\text{s}} \times \underbrace{666\ldots666}_{2008\ 6\text{s}}$ is **18 072**.

3 The sum of all the digits of a three-digit number is 21. The digit in the ones place is greater than the digit in the tens place. A new number, which is 198 more than the original one, is formed by interchanging the digit in the ones place with the digit in the hundreds place. What is the original number?

Analysis: It will not take us long to figure out that 876 – 678 = 198. Hence, the answer is 678. The question lies with whether this is the only answer.

Solution:

$100a + 10b + c = \overline{abc}$ —— (1)

Interchange the digits in the ones and hundreds places, it will become

$100c + 10b + a$ —— (2)

(2) – (1)

$$100c + 10b + a - abc = 198$$
$$100c + 10b + a - 100a - 10b - c = 198$$
$$99c - 99a = 198$$
$$99(c - a) = 198$$
$$c - a = 198 \div 99 = 2$$

Vì chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng trăm 2 đơn vị, ta thử số 597. Tuy nhiên khi đó chữ số hàng chục là 9 lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 7.

Tiếp theo, ta thử số 759.

957 – 759 = 198

Suy ra, số đã cho có thể là **678** hoặc **957**.

4 Cô Cussler sinh ngày 1 tháng Giêng của nhiều năm về trước. Năm 2002, tuổi của cô ấy bằng tổng của 4 chữ số trong năm sinh của cô ấy. Hỏi năm 2002 cô Cussler bao nhiêu tuổi?

Analysis: Một lần nữa ta sẽ biểu diễn năm sinh của cô Cussler dưới dạng: $1000 + 100a + 10b + c$, nếu chúng ta giả sử năm sinh của cô Cussler là: $1abc$.

Cách giải:

$$2002 - (1000 + 100a + 10b + c) = 1 + a + b + c$$
$$1002 - 100a - 10b - c = 1 + a + b + c$$
$$1001 = 101a + 11b + 2c$$

Lấy $a = 9$, khi đó số cần tìm có dạng $19bc$.

$$1001 = 101 \times 9 + 11b + 2c$$
$$1001 - 909 = 11b + 2c$$
$$92 = 11b + 2c$$
$$b = \frac{92 - 2c}{11}$$

Khi $c = 2$, $b = \frac{92 - 2 \times 2}{11}$

$$= \frac{88}{11}$$
$$= 8$$

Cô Cussler sinh năm 1982.
1 + 9 + 8 + 2 = 20
Vì 1982 + 20 = 2002.
Vậy năm 2002, cô Cussler 20 tuổi.

$$100c + 10b + a - abc = 198$$
$$100c + 10b + a - 100a - 10b - c = 198$$
$$99c - 99a = 198$$
$$99(c - a) = 198$$
$$c - a = 198 \div 99 = 2$$

Since the digit in the ones place is greater than the digit in the hundreds place by 2, we try 597. However, 9 is greater than 7.

Next, we try 759.

957 – 759 = 198

Hence, the original number can be **678** or **957**.

4 Miss Cussler was born on the 1st of January many years ago. In 2002, her age was the sum of all the four digits of the year that she was born in. How old was Miss Cussler in 2002?

Analysis: Again, we express the year that she was born in as $1000 + 100a + 10b + c$, if we assume it is $1abc$.

Solution:

$$2002 - (1000 + 100a + 10b + c) = 1 + a + b + c$$
$$1002 - 100a - 10b - c = 1 + a + b + c$$
$$1001 = 101a + 11b + 2c$$

Take $a = 9$, so that it becomes $19bc$.

$$1001 = 101 \times 9 + 11b + 2c$$
$$1001 - 909 = 11b + 2c$$
$$92 = 11b + 2c$$
$$b = \frac{92 - 2c}{11}$$

When $c = 2$,

$$b = \frac{92 - 2 \times 2}{11}$$
$$= \frac{88}{11}$$
$$= 8$$

Miss Cussler was born in 1982.
1 + 9 + 8 + 2 = 20
as 1982 + 20 = 2002.
Miss Cussler was **20** years old in 2002.

LUYỆN TẬP

1 Với mỗi câu hỏi dưới đây, chỉ thực hiện 3 phép tính nhân đầu tiên. Viết kết quả của 3 phép tính tiếp theo dựa trên những phán đoán của mình.

(a)
$3 \times 4 =$
$33 \times 34 =$
$333 \times 334 =$
$3333 \times 3334 =$
$33\,333 \times 33\,334 =$
$333\,333 \times 333\,334 =$

(b)
$6 \times 7 =$
$66 \times 67 =$
$666 \times 667 =$
$6666 \times 6667 =$
$66\,666 \times 66\,667 =$
$666\,666 \times 666\,667 =$

(c)
$5 \times 9 =$
$55 \times 99 =$
$555 \times 999 =$
$5555 \times 9999 =$
$55\,555 \times 99\,999 =$
$555\,555 \times 999\,999 =$

(d)
$8 \times 9 =$
$88 \times 99 =$
$888 \times 999 =$
$8888 \times 9999 =$
$88\,888 \times 99\,999 =$
$888\,888 \times 999\,999 =$

2 Tìm giá trị của: $1\,111\,111\,122\,222\,222 \div 33\,333\,334$.

PRACTICE

1 For each question below, do only the first three multiplication problems. Write out the next three products based on your conjecture.

(a)
$3 \times 4 =$
$33 \times 34 =$
$333 \times 334 =$
$3333 \times 3334 =$
$33\,333 \times 33\,334 =$
$333\,333 \times 333\,334 =$

(b)
$6 \times 7 =$
$66 \times 67 =$
$666 \times 667 =$
$6666 \times 6667 =$
$66\,666 \times 66\,667 =$
$666\,666 \times 666\,667 =$

(c)
$5 \times 9 =$
$55 \times 99 =$
$555 \times 999 =$
$5555 \times 9999 =$
$55\,555 \times 99\,999 =$
$555\,555 \times 999\,999 =$

(d)
$8 \times 9 =$
$88 \times 99 =$
$888 \times 999 =$
$8888 \times 9999 =$
$88\,888 \times 99\,999 =$
$888\,888 \times 999\,999 =$

2 Find the value of $1\,111\,111\,122\,222\,222 \div 33\,333\,334$.

2 GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH VÀ THAY THẾ

Kỹ thuật của phương pháp so sánh và thay thế (còn được gọi là phương pháp thế) được đề cập chi tiết trong Tập 3 của bộ sách ***Đánh thức Tài năng Toán học***.

Trường hợp thứ nhất, chúng ta sẽ viết hai mệnh đề về bài toán. Sau đó, chúng ta đem hai mệnh đề này ra so sánh với một mệnh đề khác bởi ban đầu hai mệnh đề này không thể so sánh trực tiếp với nhau.

Trường hợp thứ hai, chúng ta coi hai đối tượng hoặc hiện tượng là một. Nói cách khác, ta thay thế đối tượng này bằng đối tượng kia. Sau đó chúng ta cần điều chỉnh lại để giải bài toán.

EXAMPLES

1 5 chiếc bàn và 18 chiếc ghế có giá 594 đô-la.
Giá của một chiếc bàn bằng giá của 3 chiếc ghế. Hỏi mỗi chiếc bàn giá bao nhiêu? Mỗi chiếc ghế giá bao nhiêu?

Cách giải:

"Đổi" tất cả các đối tượng ra ghế.

1 chiếc bàn → 3 chiếc ghế

5 chiếc bàn → 15 chiếc ghế

15 + 18 = 33 chiếc ghế

594 : 33 = 18 đô-la

Mỗi chiếc ghế có giá là: **18 đô-la**.

3 x 18 = 54 đô-la

Mỗi chiếc bàn có giá là: **54 đô-la**.

2 Solve by Comparison and Replacement

The techniques of comparison and replacement, also known as substitution, have been studied in detail in Maths Olympiad – Beginner.

In the first case, we will write two statements about the problems. We then bring the statements to a comparable stage when they cannot be compared directly in the first place.

In the second case, we treat two items or events as if they are the same. In other words, we substitute one item for another. Adjustments need to be made to facilitate the solving of such problems.

EXAMPLES

1 5 similar tables and 18 similar chairs cost $594.
The cost of one such table is the same as the cost of 3 such chairs.
How much does each table cost?
How much does each chair cost?

Solution:

'Change' all items to chairs.

1 table → 3 chairs

5 tables → 15 chairs

15 + 18 = 33 chairs

$594 ÷ 33 = $18

Each chair costs **$18**.

3 × $18 = $54

Each table costs **$54**.