

ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA MÔN TOÁN – ĐỀ SỐ 1

I. ĐỀ BÀI

Xem trong tệp đề đính kèm theo sách

II. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

WE'RE HERE



✓ CHECKPOINT 1

Dãy số $1; 0; 0; 0; 0; 0$ có phải là một cấp số nhân không? Vì sao?

✓ CHECKPOINT 2

Xác định các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

Xem thêm bài 1, 2 trong phần "Bài tập rèn luyện".

STUDY TIP

TXĐ của hàm số lũy thừa $y = x^a$ với a là số nguyên âm hoặc bằng 0 là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, với a nguyên dương là $\mathbb{R}$, với a không nguyên là $(0; +\infty)$.

✓ CHECKPOINT 3

Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3)^{-2}$.

Xem thêm bài 3, 4 trong phần "Bài tập rèn luyện".

Câu 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. 1, -3, 9, -27, 81.

B. 1, -3, -6, -9, -12.

C. 1, -2, -4, -8, -16.

D. 0, 3, 9, 27, 81.

Lời giải Dãy 1, -3, 9, -27, 81 là cấp số nhân với công bội $q = -3$.

Dãy 1, -3, -6, -9, -12 không phải là cấp số nhân vì $\frac{-3}{1} \neq \frac{-6}{-3}$.

Dãy 1, -2, -4, -8, -16 không phải là cấp số nhân vì $\frac{-2}{1} \neq \frac{-4}{-2}$.

Dãy 0, 3, 9, 27, 81 không phải là cấp số nhân vì $u_1 = 0, u_2 \neq 0$.

Đáp án A.

Câu 2: Hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1; 0)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(0; 1)$.

Lời giải Ta có $y' = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		-2		0		-2		$+\infty$	

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Đáp án A.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (4x^2 - 1)^{-3}$.

A. $D = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

C. $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Lời giải Điều kiện xác định của hàm số là

$$4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{1}{2}.$$

Đáp án B.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, khi đó với $M(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $-x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$.

B. $x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$.

C. $x\vec{j} + y\vec{i} + z\vec{k}$.

D. $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Lời giải

Vì $M(x; y; z)$ nên $\overrightarrow{OM} = (x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Đáp án D.

Câu 5: Cho số phức $z = i + (2 - 4i) - (3 - 2i)$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. Phần thực là -1 và phần ảo là $-i$. B. Phần thực là -1 và phần ảo là $-5i$.
C. Phần thực là -1 và phần ảo là -1 . D. Phần thực là -1 và phần ảo là -5 .

CHECKPOINT 5

Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = 3 + 2i$.

Xem thêm bài 5, 6, 7, 8, 9 trong phần "Bài tập rèn luyện".

STUDY TIP

MTCT có thể tính toán giá trị các biểu thức chứa các phép toán cộng, trừ, nhân, chia trên tập số phức.

Lời giải

Cách 1: Ta có $z = i + (2 - 4i) - (3 - 2i) = i + 2 - 4i - 3 + 2i = -1 - i$.

Cách 2 (sử dụng MTCT):

- Chuyển MTCT về chế độ số phức.

- Nhập biểu thức $i + (2 - 4i) - (3 - 2i)$ vào máy, bấm dấu "=" . Máy hiển thị kết quả là $-1 - i$.

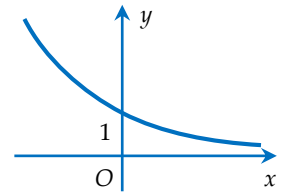
$$i + (2 - 4i) - (3 - 2i) = -1 - i$$

Vậy phần thực và phần ảo của số phức z đều bằng -1 .

Đáp án C.

Câu 6: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^2 + 2x + 1$. B. $y = \log_{0,5} x$.
C. $y = \frac{1}{2^x}$. D. $y = 2^x$.

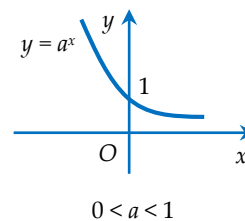
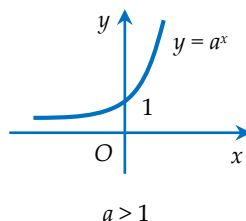


Lời giải

Do $y = \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nên dựa vào tính chất đồ thị hàm số mũ nằm trên trục hoành và hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta chọn đồ thị trên là đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2^x}$.

Đáp án C.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = a^x$:



Câu 7: Cho tam giác ABC vuông tại A và $AC = c, BC = a$. Quay tam giác ABC quanh trục AB ta thu được hình nón có diện tích xung quanh bằng

- A. πac . B. $2\pi ac$. C. $\frac{1}{3}\pi ac$. D. $\frac{1}{2}\pi ac$.

Xem thêm bài 13, 14 trong phần "Bài tập rèn luyện".

FOR REVIEW

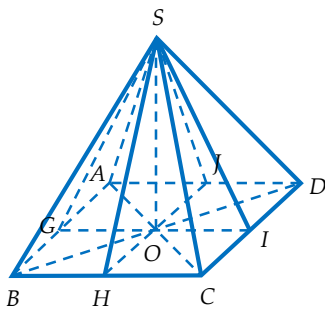
Cho hình nón có chiều cao h , độ dài đường sinh bằng l và bán kính đáy bằng r . Khi đó

(1): Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl$.

(2): Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(3): $l^2 = h^2 + r^2$.

(4): Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác cân tại đỉnh của hình nón và có cạnh bên bằng l , cạnh đáy bằng $2r$, còn diện tích bằng hr .



FOR REVIEW

Cho tập hợp A có n phần tử. Số cách lấy k phần tử từ tập hợp A (cũng chính là số tập con gồm k phần tử của A) bằng C_n^k .

CHECKPOINT 11

Cho tập hợp S gồm 2019 phần tử. Số tập con gồm 23 phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

Xem thêm bài 15 trong phần "Bài tập rèn luyện".

Lời giải

Quay tam giác ABC quanh trục AB ta thu được hình nón có đỉnh B , chiều cao $h = AB$ và bán kính đáy $r = AC$, đường sinh $l = BC$ nên diện tích xung quanh của hình nón bằng $\pi rl = \pi ac$.

Đáp án A.

Câu 8: Chọn khẳng định sai

A. Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) thì $k\vec{n}$ ($k \in \mathbb{R}$) cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

B. Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm nó đi qua và một vectơ pháp tuyến của nó.

C. Mọi mặt phẳng trong không gian $Oxyz$ đều có phương trình tổng quát dạng $Ax + By + Cz + D = 0, (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

D. Trong không gian $Oxyz$, mỗi phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0, (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ đều là phương trình của một mặt phẳng nào đó.

Lời giải

Ta thấy phương án A sai do thiếu điều kiện $k \neq 0$.

Đáp án A.

Câu 9: Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 2

Lời giải

Đó là các mặt phẳng $(SAC), (SBD), (SHJ), (SGI)$ với G, H, I, J lần lượt là các trung điểm của các cạnh AB, CB, CD, AD (hình vẽ bên).

Đáp án A.

Câu 10: Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$.

B. $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$.

C. $2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1$.

D. $(x + y)^2 = 2xy - z^2 - 1$.

Lời giải

Ta có

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ là phương trình mặt cầu.

Đáp án A.

Câu 11: Cho tập hợp A gồm 2020 phần tử. Số tập con gồm 6 phần tử của tập hợp A bằng

A. A_{2020}^6 .

B. 2020^6 .

C. A_{2020}^{2014} .

D. C_{2020}^6 .

Lời giải

Số tập con gồm 6 phần tử của tập hợp A bằng số tổ hợp chập 6 của 2020 phần tử, tức là bằng C_{2020}^6 .

Đáp án D.

MEMORIZE

Khi nhận dạng đồ thị hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất ta thường căn cứ từ tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị, giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ, tính chất đơn điệu của hàm số.

Xem thêm bài 16, 17 trong phần "Bài tập rèn luyện".

FOR REVIEW

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

($\alpha \neq -1$)

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

($a > 0, a \neq 1$)

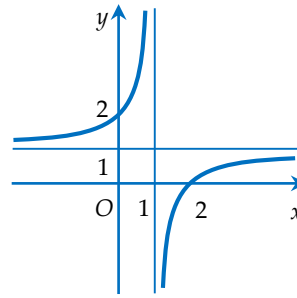
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

✓ CHECKPOINT 14

Hàm số $f(x) = (x-3)^4$ có bao nhiêu điểm cực trị? Đó là những điểm nào?

Xem thêm bài 18, 19 trong phần "Bài tập rèn luyện".

Câu 12: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

B. $y = \frac{x+2}{x-2}$.

C. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

D. $y = \frac{2x-4}{x-1}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên loại B, D.

Đồ thị hàm số qua điểm $(0;2)$ nên chọn A.

Đáp án A.

Câu 13: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{2}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{2}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.

B. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{2}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + 2\ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - 2\ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + 2\ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Đáp án C.

Câu 14: Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4$ là

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		$-$	$+$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Đáp án C.

Câu 15: Cho các số thực a, b ($a < b$). Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thì

A. $\int_a^b f(x) dx = f'(a) - f'(b)$.

B. $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

C. $\int_a^b f'(x) dx = f(a) - f(b)$.

D. $\int_a^b f(x) dx = f'(b) - f'(a)$.

FOR REVIEW

Áp dụng tính chất
 $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Lời giải

Ta có $\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$.

Đáp án B.

Câu 16: Cho $f(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$ và $g(x) = \sin x$. Tính giá trị của $\frac{f'(0)}{g'(0)}$.

A. $\frac{5}{6}$.

B. $-\frac{5}{6}$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$.

Lại có $g'(x) = \cos x \Rightarrow g'(0) = 1$. Vậy $\frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{5}{6}$.

Đáp án A.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $|a| = 1$.

B. $a+b+c=1$.

C. $|b| = 1$.

D. $|c| = 1$.

Lời giải

Ta có phương trình mặt phẳng (Oxz) : $y=0$.

Do mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên $d(I;(Oxz)) = 1 \Leftrightarrow |b| = 1$.

Đáp án C.

Lưu ý

Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm $I(x_I;y_I;z_I)$, bán kính R thì

$$d(I;(P)) = R \Leftrightarrow \frac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = R.$$

✓ CHECKPOINT 17

Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(-1;2;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) .

Xem thêm bài 20, 21 trong phần "Bài tập rèn luyện".

✓ CHECKPOINT 18

Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{a^{12}b^6}}.$$

Xem thêm bài 22, 23 trong phần "Bài tập rèn luyện".

Câu 18: Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P = m^2 + n^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P \in (330; 340)$.

B. $P \in (350; 360)$.

C. $P \in (260; 370)$.

D. $P \in (340; 350)$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt[5]{8\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{2^3\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = 2^{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{20}} = 2^{\frac{11}{15}}$

Cách khác: Bạn có thể sử dụng MTCT bấm liên tiếp như sau:

$$\sqrt[5]{8\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{2^3\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = 2^{\frac{(((((1+3)+1)+2)+3)+5)}{15}} = 2^{\frac{11}{15}}$$

Đáp án D.

Câu 19: Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i) = 3-5i$. Tính môđun của z .

A. $|z| = \sqrt{17}$.

B. $|z| = 16$.

C. $|z| = 17$.

D. $|z| = 4$.

STUDY TIP

Ta có thể sử dụng MTCT để tính giá trị biểu thức $\frac{3-5i}{1+i}$:

CHECKPOINT 19

Cho số phức z thỏa mãn:

$$(2-i)z-2=2+3i.$$

Tìm môđun của số phức z .

Xem thêm bài 24 trong phần "Bài tập rèn luyện".

STUDY TIP

Nếu hàm số

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad \neq bc; ac \neq 0)$$

liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

$$\max_{[a;b]} y + \min_{[a;b]} y = y(a) + y(b)$$

CHECKPOINT 20

Xác định giá trị của tham số thực m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên

$[1;2]$ bằng 8.

Xem thêm bài 25 trong phần "Bài tập rèn luyện".

Lời giải Cách 1: Ta có: $z(1+i) = 3-5i \Leftrightarrow z = \frac{3-5i}{1+i} = \frac{(3-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$$= \frac{3-3i-5i+5i^2}{1-i^2} = \frac{3-8i-5}{1+1} = \frac{-2-8i}{2} = -1-4i.$$

$$\text{Do đó } |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}.$$

Cách 2: Ta có $z(1+i) = 3-5i \Leftrightarrow |z(1+i)| = |3-5i| \Leftrightarrow |z| \cdot |1+i| = |3-5i|$

$$\Leftrightarrow |z| \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{3^2 + (-5)^2} \Leftrightarrow |z| = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{\frac{34}{2}} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{17}.$$

Cách 3: (Sử dụng MTCT)

Ta có $z(1+i) = 3-5i \Leftrightarrow z = \frac{3-5i}{1+i}$. Chuyển MTCT về MODE 2 (Số phức). Nhập

vào MTCT biểu thức $\frac{3-5i}{1+i}$, bấm dấu "=":

Nhập vào MTCT biểu thức $|Ans|$, bấm dấu "=":

Cách 4: (Sử dụng MTCT)

Ta có $z(1+i) = 3-5i \Leftrightarrow z = \frac{3-5i}{1+i}$. Chuyển MTCT về MODE 2 (Số phức). Nhập

vào MTCT biểu thức $|\frac{3-5i}{1+i}|$, bấm dấu "=".

Đáp án A.

Câu 20: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ trên đoạn

$[0;3]$ bằng 2 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m \in \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$

B. $m \in (-1; 0).$

C. $m \in \left(0; \frac{3}{2}\right).$

D. $m \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right).$

Lời giải Hàm số đã cho xác định trên $[0;3]$.

$$\text{Ta có } \max_{[0;3]} y + \min_{[0;3]} y = y(0) + y(3) = \frac{3}{4} - \frac{5}{4}m$$

Kết hợp với giả thiết ta có

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{4}m = 2 \Leftrightarrow m = -1.$$

Ta thấy đáp án A là phù hợp.

Đáp án A.

Câu 21: Số nghiệm của phương trình $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải Điều kiện: $2^{x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow 2^x > \frac{3}{2}$.

Ta có: $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3)$

$$\Leftrightarrow \log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x (2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow 4^x + 4 = 2^x (2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -1 & (\text{k t/m}) \\ 2^x = 4 & (\text{t/m}) \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \text{ Đối chiếu điều kiện ta thấy } x = 2 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm.

Đáp án C.

Câu 22: Cho i là đơn vị ảo. Gọi S là tập hợp các số nguyên dương n có 2 chữ số thỏa mãn i^n là số nguyên dương. Số phần tử của S là

A. 22.

B. 23.

C. 45.

D. 46.

Lời giải Ta có với mọi $k \in \mathbb{N}$: $i^{4k} = (i^2)^{2k} = (-1)^{2k} = 1$; $i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$;

$$i^{4k+2} = i^{4k+1} \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1; i^{4k+3} = i^{4k+2} \cdot i = (-1) \cdot i = -i.$$

Do đó để thỏa mãn i^n là số nguyên dương thì $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$.

Số nhỏ nhất có 2 chữ số chia hết cho 4 là 12, số lớn nhất có hai chữ số chia hết cho 4 là 96.

Vậy có $\frac{96-12}{4} + 1 = 22$ số nguyên dương n có 2 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án A.

Câu 23: Hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh bằng 2cm , thể tích của khối trụ tương ứng bằng

A. πcm^3 .

B. $2\pi\text{cm}^3$.

C. $3\pi\text{cm}^3$.

D. $4\pi\text{cm}^3$.

Lời giải Giả sử hình trụ có độ dài chiều cao bằng h và bán kính đáy bằng r thì thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật có kích thước bằng h và $2r$. Theo giả thiết, ta có $h = 2$ và $2r = 2 \Leftrightarrow r = 1$.

Suy ra thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = 2\pi$.

Đáp án B.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng có phương trình nào sau đây song song với mặt phẳng (Oxz) ?

A. $(d_1): \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

B. $(d_2): \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

C. $(d_3): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 \\ z = 6 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

D. $(d_4): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 5 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

DISCOVERY



Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta luôn có:

$$i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i;$$

$$i^{4k+2} = -1; i^{4k+3} = -i.$$

Xem thêm bài 26, 27, 28 trong phần "Bài tập rèn luyện".

FOR REVIEW

Cho hình trụ có độ dài chiều cao bằng h và bán kính đáy bằng r . Khi đó

1): Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi r h$.

(2): Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

(3): Thể tích khối trụ là

$$V = \pi r^2 h.$$

(4): Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật có kích thước bằng h và $2r$.

Lời giải Mặt phẳng (Oxz) : $y = 0$ có một vectơ pháp tuyến là vectơ $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
 Nếu một đường thẳng song song với mặt phẳng (Oxz) thì vectơ chỉ phương của đường thẳng đó phải vuông góc với vectơ $\vec{j}$, khi đó đáp án C và D thỏa mãn.
 Đường thẳng (d_3) đi qua điểm $A(2; 0; 6) \in (Oxz)$ nên $d_3 \subset (Oxz)$.
 Đường thẳng (d_4) đi qua điểm $B(1; 3; 5) \notin (Oxz)$ nên $d_4 \parallel (Oxz)$.

Đáp án D.

Câu 25: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x - 5m}{2x - m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

- A. $m = -1$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

✓ **CHECKPOINT 25**

Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx - 5m}{2x - m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Xem thêm bài 29 trong phần "Bài tập rèn luyện".

Lời giải Ta có $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m+1)x - 5m}{2x - m} = \frac{m+1}{2}$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có TCN $y = \frac{m+1}{2} \Rightarrow \frac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1$.

Đáp án D.

Lưu ý

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng vô hạn, đường thẳng $d: y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

Câu 26: Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x+1}$?

- A. $F(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C$. B. $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C$.
 C. $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C$. D. $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3} + C$.

✓ **CHECKPOINT 26**

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

MEMORIZE

Cách 2 cho ta đáp án cuối cùng giống cách đổi biến trên nhưng về bản chất toán thì không đúng. Do phép biến đổi $= (1+x)^{\frac{1}{3}}$ đã làm thay đổi TXĐ của hàm số ban đầu.

Lời giải Cách 1: Ta có: $I = \int \sqrt[3]{x+1} dx$.

Đặt: $t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3 = x+1 \Rightarrow 3t^2 dt = dx$.

$\Rightarrow I = \int t \cdot 3t^2 dt = \int 3t^3 dt = \frac{3}{4}t^4 + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C$.

Vậy $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C$.

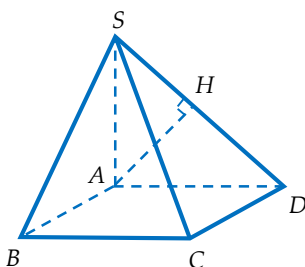
Cách 2: Có thể "giải nhanh" như sau:

$F(x) = \int \sqrt[3]{x+1} dx = \int (x+1)^{\frac{1}{3}} d(x+1) = \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C$.

Đáp án C.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD .

- A. $2a$. B. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. C. $a\sqrt{2}$. D. a .



Lời giải Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA & (\text{do } SA \perp (ABCD)) \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD).$

Trong (SAD) kẻ $AH \perp SD$ thì AH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD . Do đó $d(AB, CD) = AH$.

ΔSAD vuông cân nên $AH = \frac{1}{2}SD = a\sqrt{2}$.

Vậy $d(AB, SD) = a\sqrt{2}$.

Đáp án C.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	0	2020	

Giá trị cực đại của hàm số bằng

A. -2 .

B. 2020 .

C. 3 .

D. 1 .

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên suy ra giá trị cực đại của hàm số bằng 3 tại $x = -2$.

Đáp án C.

Câu 29: Cho tứ diện đều $ABCD$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng 6 . Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

A. $V = \frac{27\sqrt{3}}{2}$.

B. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

C. $V = 5\sqrt{3}$.

D. $V = 27\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi cạnh của tứ diện đều $ABCD$ là a .

Gọi M là trung điểm cạnh CD và G là trọng tâm tam giác BCD .

Ta có $AG^2 + BG^2 = AB^2 \Leftrightarrow 6^2 + \left(\frac{2}{3}BM^2\right) = a^2 \Leftrightarrow 36 + \left(\frac{2}{3}a \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow a = 3\sqrt{6}$.

Khi đó $S_{ABCD} = \frac{54\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của tứ diện $ABCD$ là $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot AG = \frac{1}{3} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 27\sqrt{3}$.

Đáp án D.

Câu 30: Tập tất cả giá trị của tham số thực m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ tại hai điểm phân biệt là

A. $(-\infty; 0)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $\{5\}$.

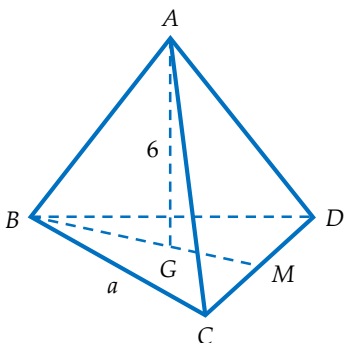
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-x+1}{2x-1} = x + m \quad (1)$

CHECKPOINT 28

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ câu 28 ở bên. Hãy xác định các điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số và điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Xem thêm bài 31, 32, 33 trong phần "Bài tập rèn luyện".



✓ CHECKPOINT 30

Xác định các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị

hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt.

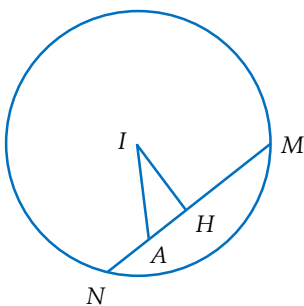
Xem thêm bài 34, 35 trong phần "Bài tập rèn luyện".

✓ CHECKPOINT 31

Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$.

Tính tích phân $\int_0^2 f(2x) dx$.

Xem thêm bài 36 trong phần "Bài tập rèn luyện".



MEMORIZE

Đường thẳng $d_1: y = k_1x + b_1$ vuông góc với đường thẳng $d_2: y = k_2x + b_2$ khi và chỉ khi $k_1 \cdot k_2 = -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+1=(x+m)(2x-1) \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=2x^2+2mx-m-1=0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 2m + 2 > 0 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0 \end{cases} \text{ thỏa mãn với } \forall m \in \mathbb{R}.$$

Đáp án B.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và $\int_4^9 f(x) dx = 10$. Tính tích phân

$$J = \int_0^1 f(5x+4) dx.$$

A. $J = 4$.

B. $J = 2$.

C. $J = 10$.

D. $J = 50$.

Lời giải Đặt $t = 5x + 4 \Rightarrow dt = 5dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 4$; $x = 1 \Rightarrow t = 9$.

$$\Rightarrow J = \int_4^9 f(t) \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} \int_4^9 f(x) dx = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2.$$

Đáp án B.

Câu 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;-2)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$. Một đường thẳng d đi qua A , cắt mặt cầu tại hai điểm M, N . Độ dài ngắn nhất của MN là

A. 8.

B. 4.

C. 6.

D. 10.

Lời giải Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$ có tâm $I(1;-2;-3)$ và bán kính $R = 5$. Ta có $AI = 3 < R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu.

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng d . Ta có $IH \leq IA$.

$$\text{Mặt khác } MN = 2\sqrt{IM^2 - IH^2} = 2\sqrt{R^2 - IH^2} = 2\sqrt{25 - IH^2}$$

Để MN có độ dài ngắn nhất thì

$$IH_{\max} \Leftrightarrow IH = IA \Leftrightarrow H \equiv A \Leftrightarrow MN_{\min} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8.$$

Đáp án A.

Câu 33: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả những giá trị nguyên của $k \in [-2020; 2020]$ để trên đồ thị (C) có ít nhất một điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $(d): y = (k-6)x$.

A. 4041.

B. 2025.

C. 2026.

D. 2027.

Lời giải TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 3$.

Trường hợp 1: Nếu $k = 6$ thì $(d): y = 0$

✓ CHECKPOINT 33

Cho hàm số

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$$

có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của k để trên đồ thị (C) có ít nhất một điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng

$$(d): y = (k-3)x.$$

Xem thêm bài 37 trong phần "Bài tập rèn luyện".

⇒ Không tồn tại tiếp tuyến vuông góc với (d).

Trường hợp 2: Nếu $k \neq 6$ thì theo giả thiết ta có:

$$(k-6)(3x_0^2 - 6x_0 + 3) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 3 + \frac{1}{k-6} = 0(*)$$

Theo yêu cầu bài toán, phương trình (*) có nghiệm.

$$\text{Do đó } \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{k-6} \geq 0 \Leftrightarrow k < 6$$

Vậy $k \in \{-2020; -2018; \dots; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ Có 2026 giá trị nguyên của k thỏa đề bài.

Đáp án C.

Câu 34: Cho a, b, c là các số thực và số phức $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Giá trị của $(a+bz+cz^2)(a+bz^2+cz)$ bằng

A. $a+b+c$. B. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$.
C. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$. D. 0.

Lời giải

Cách 1: Ta có $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{z}$ và $\bar{z}^2 = z, z + \bar{z} = -1, z\bar{z} = |z|^2 = 1$.

$$\text{Khi đó } (a+bz+cz^2)(a+bz^2+cz) = (a+bz+c\bar{z})(a+b\bar{z}+cz)$$

$$= a^2 + ab\bar{z} + acz + abz + b^2z\bar{z} + bcz^2 + ac\bar{z} + bc\bar{z}^2 + c^2z\bar{z}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

Cách 2: - Chọn một bộ số a, b, c bất kì.

$$\text{Tính giá trị biểu thức } P = (a+bz+cz^2)(a+bz^2+cz).$$

- So sánh giá trị biểu thức P với các đáp án. Ta thấy B là đáp án đúng.

Đáp án B.

Câu 35: Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng theo thể thức lãi kép (tức là tiền lãi của kỳ trước được cộng vào vốn của kỳ kế tiếp) với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm gửi tiền vào ngân hàng gần bằng với kết quả nào sau đây. Biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền lãi suất ngân hàng không thay đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 212 triệu đồng.

B. 216 triệu đồng.

C. 210 triệu đồng.

D. 220 triệu đồng.

Lời giải

Số tiền người đó có được sau đúng 6 tháng gửi là:

$$T_1 = 10^8 \cdot (1+2\%)^2 = 104.040.000 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền người đó có được sau 1 năm khi người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó là:

$$T_2 = (104.040.000 + 100.000.000)(1+2\%)^2 = 212.283.216 \text{ (đồng)}.$$

Đáp án A.

✓ CHECKPOINT 35

Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng 200 triệu đồng theo thể thức lãi kép (tức là tiền lãi được cộng vào vốn của kỳ kế tiếp). Ban đầu người đó gửi với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2,1%/ kỳ hạn, sau 2 năm người đó thay đổi phương thức gửi, chuyển thành kỳ hạn 1 tháng với lãi suất 0,65%/ tháng. Tính tổng số tiền lãi nhận được (làm tròn đến nghìn đồng) sau 5 năm.

Xem thêm bài 38 trong phần "Bài tập rèn luyện".

FOR REVIEW

Với hai tập hợp hữu hạn A và B thì
 $n(A \cup B)$
 $= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.
 Công thức xác suất mở rộng đối với hai biến cố
 $P(A \cup B)$
 $= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 được suy ra từ kết quả này.

Xem thêm bài 39, 40, 41 trong phần "Bài tập rèn luyện".

FOR REVIEW

Giả sử mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (α) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C) thì
 (1): $h = d(I; (\alpha)) < R$.
 (2): Bán kính của (C) là
 $r = \sqrt{R^2 - h^2}$.
 (3): Tâm J của (C) là hình chiếu vuông góc của I trên (α) .

Xem thêm bài 42, 43 trong phần "Bài tập rèn luyện".

Câu 36: Xác suất để biến cố A xảy ra là $\frac{3}{4}$; xác suất để biến cố B xảy ra là $\frac{2}{3}$.
 Gọi p là xác suất để cả hai biến cố A và B cùng xảy ra. Thế thì tập giá trị của p là

- A. $\left[\frac{5}{12}; \frac{2}{3}\right]$. B. $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$. C. $\left[\frac{1}{12}; \frac{2}{3}\right]$. D. $\left[\frac{5}{12}; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải Do $A \cap B \subset A$ và $A \cap B \subset B$ nên $p = P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\} = \frac{2}{3}$.

Lại do $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ và $P(A \cup B) \leq 1$ nên

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - p \leq 1 \Leftrightarrow p \geq \frac{5}{12}.$$

Do vậy, $p \in \left[\frac{5}{12}; \frac{2}{3}\right]$.

Đáp án A.

Câu 37: Một quả bóng hình cầu nổi trên mặt hồ khi đóng băng. Khi lấy bóng lên (không làm vỡ băng), bóng để lại một lỗ trống bề ngang 24cm đo ở bề mặt trên cùng và sâu 8cm , thể tích của khối cầu tương ứng bằng

- A. $2304\pi\text{cm}^3$. B. $\frac{8788\pi}{3}\text{cm}^3$. C. $2048\sqrt{3}\pi\text{cm}^3$. D. $8788\pi\text{cm}^3$.

Lời giải Giả sử quả bóng là mặt cầu $S(O; r)$. Khi đó mặt hồ đóng băng chính là mặt phẳng (α) cắt mặt cầu.

Mặt phẳng (α) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 24cm hay bán kính bằng 12cm . Đặt $h = d(O; (\alpha))$. Theo giả thiết, ta có $h + 8 = r$ và $r^2 = h^2 + 12^2$. Suy ra $r^2 = (r - 8)^2 + 12^2 \Leftrightarrow r = 13$.

Do đó, thể tích của khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{8788\pi}{3}$.

Đáp án B.

Câu 38: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:
 $|z - 10 + 2i| = |z + 2 - 14i|$ và $|z - 1 - 10i| = 5$?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. Vô số.

Lời giải Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.

Ta có $|z - 10 + 2i| = |z + 2 - 14i|$

$$\Leftrightarrow (x - 10)^2 + (y + 2)^2 = (x + 2)^2 + (y - 14)^2 \Leftrightarrow 3x - 4y + 12 = 0.$$

Vậy tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn $|z - 10 + 2i| = |z + 2 - 14i|$ là đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 12 = 0$.

Mặt khác ta có tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa $|z - 1 - 10i| = 5$ là đường tròn (C) có tâm $I(1; 10)$, bán kính $R = 5$.

Ta có $d(I, \Delta) = \frac{|3.1 - 4.10 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$. Suy ra Δ và (C) tiếp xúc nhau.

Mà $M = \Delta \cap (C)$. Do đó chỉ có duy nhất một điểm $M(x; y)$ tức là chỉ có duy nhất một số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án C.

Câu 39: Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \frac{a}{e+1} + b \ln \frac{2}{e+1} + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{(1+x)^2} \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{1+x} \end{cases}$

Theo công thức tích phân từng phần có

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx &= -\frac{\ln x}{1+x} \Big|_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x(1+x)} = \frac{-1}{e+1} + \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{-1}{e+1} + (\ln|x| - \ln|x+1|) \Big|_1^e = \frac{-1}{e+1} + \ln \frac{2}{e+1} + 1. \end{aligned}$$

Suy ra $a = -1, b = 1, c = 1$. Vậy $a+b+c = 1$.

Đáp án B.

Câu 40: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ và

$$d': \begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 2 + t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 5 \end{cases}$$

Viết phương trình chính tắc của đường vuông góc chung của d và d' .

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

Lời giải Hai đường thẳng d và d' lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; -1)$ và $\vec{u}' = (1; 1; 0)$.

Lấy $A(2+t; 1-t; 2-t) \in d$ và $B(3+t'; 2+t'; 5) \in d'$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1+t'-t; t'+t+1; t+3).$$

AB là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d và d' khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+t'-t) - (t'+t+1) - (t+3) = 0 \\ (1+t'-t) + (t'+t+1) + 0 \cdot (t+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t-3=0 \\ 2t'+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t'=-1 \end{cases}$$

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$ và $A(1; 2; 3) \Rightarrow AB: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

Đáp án D.

STUDY TIP

Cách viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d và d' .

Bước 1: Lấy hai điểm A và B lần lượt thuộc hai đường đã cho (tọa độ theo tham số).

Bước 2: Giải điều kiện

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}' = 0 \end{cases} \text{ tìm ra } t \text{ và } t'.$$

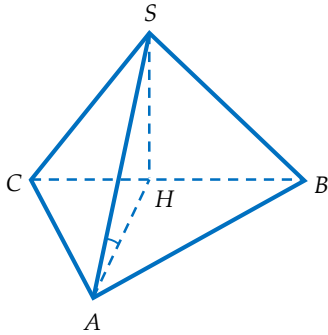
Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Số đo của góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

A. 30° .

B. 75° .

C. 45° .

D. 60° .



Lời giải Gọi H là trung điểm của BC , (SBC) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên ta có $SH \perp (ABC)$.

Khi đó ta có hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC) là AH .

Suy ra góc giữa SA và (ABC) bằng góc giữa SA và AH bằng góc SAH .

Ta có: $AH = \frac{1}{2}BC$, $SH = BC \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó trong tam giác SAH ta có $\tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \sqrt{3}$. Vậy góc $SAH = 60^\circ$.

Đáp án D.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - (2m-5)x + 5$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 2020.

B. 2022.

C. 2021.

D. 2023.

STUDY TIP

Tổng quát:

Với bài toán tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (các hệ số a, b, c, d có thể chứa m) đơn điệu trên tập D .

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

+ Hàm số đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$.

+ Hàm số nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Cô lập m đi đến $f(x) \geq g(m), \forall x \in D$

hoặc $f(x) \leq g(m), \forall x \in D$.

Với bài toán này ta có thể xử lý $f(x) \geq g(m), \forall x \in D$

$\Leftrightarrow g(m) \leq \min_D f(x)$

$f(x) \leq g(m), \forall x \in D$

$\Leftrightarrow g(m) \geq \max_D f(x)$

Hướng 2: Xét dấu của tam thức $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ đi đến kết quả.

Lời giải

Cách 1: Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 2m + 5$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 2m + 5 \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3(x-1)^2 \geq 2m-2, \forall x \in (0; +\infty)$

Vì $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ (dấu bằng xảy ra khi $x=1$) nên

$3(x-1)^2 \geq 2m-2, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 2m-2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Do m nguyên và $m \in [-2020; 2020] \Rightarrow m \in \{-2020; -2019; -2018, \dots, 0, 1\}$.

Vậy có 2022 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Cách 2: Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 2m + 5; \Delta' = 9 - 3(5 - 2m) = 6m - 6$.

+) Nếu $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó, hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

+) Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 (x_1 < x_2)$.

Khi đó, hàm số đồng biến trên $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$.

Để hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ thì

$x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < 0 \\ \frac{-2m+5}{3} \geq 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}.$

Do vậy, $m \leq 1$ thỏa mãn bài toán.

Mà m nguyên và $m \in [-2020; 2020] \Rightarrow m \in \{-2020; -2019; -2018, \dots, 0, 1\}$.

Vậy có 2022 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Đáp án B.

Câu 43: Một xe lửa chuyển động chậm dần đều và dừng lại hẳn sau 20s kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Trong thời gian đó xe chạy được 120m. Cho biết công thức tính vận tốc của chuyển động biến đổi đều là $v = v_0 + at$; trong đó $a(\text{m/s}^2)$ là gia tốc, $v(\text{m/s})$ là vận tốc tại thời điểm $t(\text{s})$. Hãy tính vận tốc v_0 của xe lửa lúc bắt đầu hãm phanh.

A. 30 m/s.

B. 6 m/s.

C. 12 m/s.

D. 45 m/s.

✓ CHECKPOINT 43

Một vật chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 5t$ (m/s) đi được 10(s) thì vật đó lại chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -50$ (m/s²). Tính quãng đường S (m) đi được của vật đó từ lúc bắt đầu chuyển động cho đến khi dừng hẳn.

Lời giải

Tại thời điểm $t = 20$ (s) thì $v(20) = 0$ nên $v_0 + 20a = 0 \Rightarrow a = -\frac{v_0}{20}$.

Do đó, $v(t) = v_0 - \frac{v_0}{20}t$.

Mặt khác, $v(t) = s'(t) \Rightarrow \int_0^{20} v(t) dt = \int_0^{20} s'(t) dt = s(t) \Big|_0^{20} = s(20) - s(0) = 120$.

Suy ra, $\int_0^{20} \left(v_0 - \frac{v_0}{20}t \right) dt = 120 \Rightarrow \left(v_0 t - \frac{v_0}{40}t^2 \right) \Big|_0^{20} = 120$.

Từ đó ta có phương trình $20v_0 - 10v_0 = 120 \Rightarrow v_0 = 12$ (m/s).

Đáp án C.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x) = 2020 \ln \left(e^{\frac{x}{2020}} + \sqrt{e} \right)$. Tính giá trị biểu thức

$A = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2019)$

A. 2018.

B. 1009.

C. $\frac{2017}{2}$.

D. $\frac{2019}{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = f'(x) = 2020 \frac{\left(e^{\frac{x}{2020}} + \sqrt{e} \right)'}{\left(e^{\frac{x}{2020}} + \sqrt{e} \right)} = \frac{e^{\frac{x}{2020}}}{e^{\frac{x}{2020}} + \sqrt{e}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) + f'(2020-x) &= \frac{e^{\frac{x}{2020}}}{e^{\frac{x}{2020}} + \sqrt{e}} + \frac{e^{\frac{2020-x}{2020}}}{e^{\frac{2020-x}{2020}} + \sqrt{e}} = \frac{e^{\frac{x}{2020}}}{e^{\frac{x}{2020}} + \sqrt{e}} + \frac{e^{1-\frac{x}{2020}}}{e^{1-\frac{x}{2020}} + \sqrt{e}} \\ &= \frac{e^{\frac{x}{2020}}}{e^{\frac{x}{2020}} + \sqrt{e}} + \frac{e}{e + \sqrt{e} \cdot e^{\frac{x}{2020}}} = \frac{e^{\frac{x}{2020}}}{e^{\frac{x}{2020}} + \sqrt{e}} + \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} + e^{\frac{x}{2020}}} = 1 \end{aligned}$$

Bởi vậy

$$2A = [f'(1) + f'(2019)] + [f'(2) + f'(2018)] + \dots + [f'(2019) + f'(1)] = 2019$$

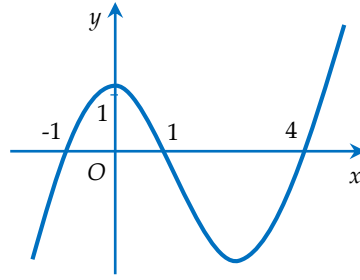
$$\text{Nên } A = \frac{2019}{2}$$

Đáp án D.

Câu 45: Cho hàm số đa thức bậc ba $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ, và $g(x) = \sqrt[3]{2018+x} - \sqrt[3]{2018-x} + 2020x$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$g\left[2019f\left(\sqrt{15x^2 - 30x + 16}\right)\right] + g\left[m\sqrt{15x^2 - 30x + 16} + m\right] = 0$$

có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2]$.



A. 1513.

B. Không có giá trị nào của m .

C. 1515.

D. 1514.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = \sqrt[9]{2018+x} - \sqrt[9]{2018-x} + 2020x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Với $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $-x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \sqrt[9]{2018-x} - \sqrt[9]{2018+x} - 2020x = -g(x)$ nên $y = g(x)$ là hàm số lẻ.

$$\text{Mặt khác } g'(x) = \frac{1}{9\sqrt[9]{(2018+x)^8}} + \frac{1}{9\sqrt[9]{(2018-x)^8}} + 2020 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $y = g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } g\left[2019f\left(\sqrt{15x^2 - 30x + 16}\right)\right] + g\left[m\sqrt{15x^2 - 30x + 16} + m\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow g\left[2019f\left(\sqrt{15x^2 - 30x + 16}\right)\right] = -g\left[m\sqrt{15x^2 - 30x + 16} + m\right]$$

$$\Leftrightarrow g\left[2019f\left(\sqrt{15x^2 - 30x + 16}\right)\right] = g\left[-m\sqrt{15x^2 - 30x + 16} - m\right]$$

$$\Leftrightarrow 2019f\left(\sqrt{15x^2 - 30x + 16}\right) = -m\sqrt{15x^2 - 30x + 16} - m$$

$$\text{Từ giả thiết ta có } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{15x^2 - 30x + 16} \Leftrightarrow t = \sqrt{15(x-1)^2 + 1} \text{ do } x \in [0; 2] \text{ nên } t \in [1; 4].$$

Nhận xét:

Với mỗi $t \in (1; 4]$ tương ứng có 2 giá trị $x \in [0; 2]$.

Với $t = 1$ tương ứng có 1 giá trị $x \in [0; 2]$.

$$\text{Phương trình: } 2019f\left(\sqrt{15x^2 - 30x + 16}\right) + m\sqrt{15x^2 - 30x + 16} + m = 0 \quad (1)$$

$$\text{trở thành: } 2019f(t) + mt + m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-2019f(t)}{t+1} \text{ với } t \in [1; 4].$$

$$\Leftrightarrow m = -2019\left(\frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{3}t + \frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow -m = 673(t^2 - 5t + 4) \text{ với } t \in [1; 4] \quad (2)$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm x phân biệt thuộc đoạn $[0; 2]$ tương đương phương trình (2) có 2 nghiệm t phân biệt thuộc nửa khoảng $(1; 4]$.

$$\text{Xét } h(t) = 673(t^2 - 5t + 4) \text{ với } t \in (1; 4].$$

Bảng biến thiên $h(t)$:

MEMORIZE

Sai lầm thường gặp là coi số nghiệm phương trình ẩn x đã cho bằng số nghiệm ẩn t của phương trình (2).

STUDY TIP

Để giải bài toán bên, trước hết phải phát hiện được hàm số $y = g(x)$ là hàm số lẻ và đồng biến $\mathbb{R}$.

Xem thêm bài 51, 52 trong phần "Bài tập rèn luyện".

t	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$h'(t)$			-	0	+
$h(t)$		0		0	

$-\frac{6057}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: $-\frac{6057}{4} < -m < 0$ và m nguyên suy ra $1 \leq m \leq 1514$.

Vậy có 1514 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Đáp án D.

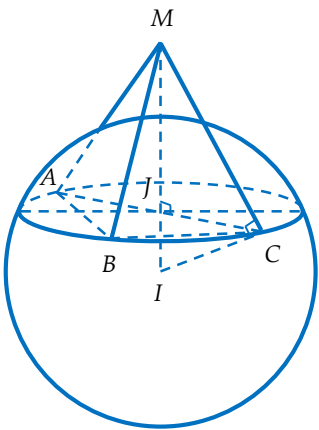
Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a; b; c)$ ($a > 0$) nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$, $\widehat{BMC} = 90^\circ$, $\widehat{CMA} = 120^\circ$. Tính $a^3 + b^3 + c^3$.

A. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{173}{9}$.

B. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{112}{9}$.

C. $a^3 + b^3 + c^3 = -8$.

D. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{23}{9}$.



CHECKPOINT 46

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{14}{3}$$

và đường thẳng

$$d: \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{1}.$$

Tìm điểm $A(x_0; y_0; z_0)$

($x_0 > 0$) là điểm nằm trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được ba tiếp tuyến đến mặt cầu (S) với các tiếp điểm là B, C, D thỏa mãn $ABCD$ là tứ diện đều.

Xem thêm bài 53, 54 trong phần "Bài tập rèn luyện".

Lời giải Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -3)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

Do $M(a; b; c) \in d$ nên $M(t-1; t-2; t+1)$, mà $a > 0$ nên $t-1 > 0 \Leftrightarrow t > 1$.

Đặt $MA = MB = MC = m > 0$.

Trong $\triangle AMB$ có

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cdot \cos \widehat{AMB} = 2m^2 - 2m^2 \cdot \cos 60^\circ = m^2 \Rightarrow AB = m.$$

Trong $\triangle BMC$ có

$$BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB \cdot MC \cdot \cos \widehat{BMC} = 2m^2 - 2m^2 \cdot \cos 90^\circ = 2m^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}m.$$

Trong $\triangle AMC$ có

$$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA \cdot MC \cdot \cos \widehat{CMA} = 2m^2 - 2m^2 \cdot \cos 120^\circ = 3m^2 \Rightarrow AC = \sqrt{3}m$$

Nhận xét thấy $AB^2 + BC^2 = m^2 + (\sqrt{2}m)^2 = (\sqrt{3}m)^2 = AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại B .

Gọi J là trung điểm của AC thì $JA = JB = JC$, mà $MA = MB = MC$ và $IA = IB = IC$ nên I, J, M thẳng hàng và $IM \perp (ABC)$ tại J .

$$\text{Ta có } \sin \widehat{IMC} = \sin \widehat{JMC} \Leftrightarrow \frac{IC}{MI} = \frac{JC}{MC} = \frac{AC}{2MC} = \frac{\sqrt{3}m}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{2IC}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = 6.$$

$$\text{Lại có } MI^2 = (2-t)^2 + (4-t)^2 + (-4-t)^2 = 3t^2 - 4t + 36.$$

$$\text{Suy ra } MI^2 = 36 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}. \text{ Do } t > 1 \text{ nên } t = \frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

$$\text{Vậy } a^3 + b^3 + c^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{112}{9}.$$

Đáp án B.

Một số tính chất có thể khai thác được trong bài toán về tiếp tuyến kẻ từ một điểm nằm ngoài mặt cầu

Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và một điểm M nằm ngoài mặt cầu. Đặt $IM = d$.

1. Tập hợp tất cả các tiếp tuyến kẻ từ điểm M đến mặt cầu (S) là một mặt nón đỉnh tại M , đường sinh của mặt nón đó chính là tiếp tuyến, trục là đường thẳng MI .

Nếu gọi A là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M với mặt cầu (S) thì tập hợp các điểm A là một đường tròn (C) có bán kính r , tập hợp đoạn thẳng MA là một hình nón có đáy là hình tròn (C) .

Tâm của (C) là điểm H , với H là giao điểm của MI với mặt phẳng chứa hình tròn (C) , $AH = r$.

Do tam giác IAM vuông tại A và AH là đường cao nên các hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông đều được thỏa mãn. Cụ thể:

$$(i) MI^2 = IA^2 + MA^2 \rightarrow MA^2 = d^2 - R^2;$$

$$(ii) IA^2 = IH \cdot IM \rightarrow IH = \frac{R^2}{d}; MA^2 = MH \cdot MI \rightarrow MH = \frac{d^2 - R^2}{d};$$

$$(iii) MI \cdot AH = IA \cdot AM \rightarrow r = AH = \frac{R\sqrt{d^2 - R^2}}{d};$$

$$(iv) AH^2 = IH \cdot HM;$$

$$(v) \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{AM^2} \rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

2. Đường thẳng qua M cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E và F thì $ME \cdot MF = MA^2 = d^2 - R^2$ (ứng dụng phương tích của một điểm đối với một đường tròn).

3. Góc lớn nhất tạo bởi hai tiếp tuyến qua M là 2φ với $\sin \varphi = \frac{IA}{MI} = \frac{R}{d}$.

4. Gọi B là một tiếp điểm (khác A), K là trung điểm của AB và $\widehat{AMB} = \alpha$ thì

$$AB^2 = 4AK^2 = 4 \left(MA \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 = 4MA^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4(MI^2 - IA^2) \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ = 2(MI^2 - R^2)(1 - \cos \alpha)$$

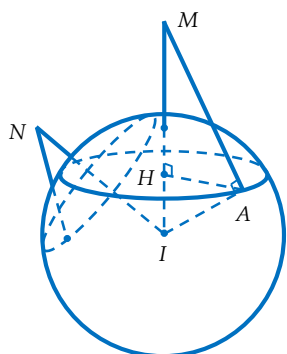
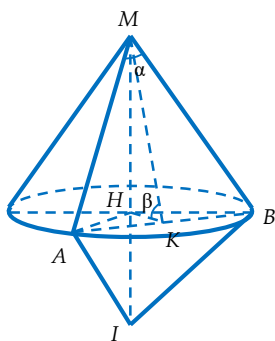
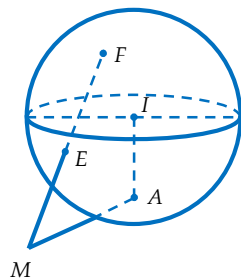
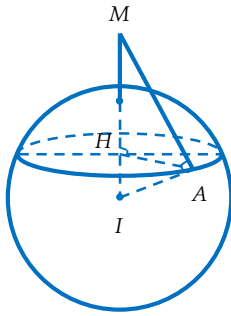
$\rightarrow AB = \sqrt{2(d^2 - R^2)(1 - \cos \alpha)}$. Khi α lớn nhất thì $AB = 2r$ (AB là đường kính của đường tròn (C))

Nếu $(\widehat{MAB}, \widehat{HAB}) = \widehat{MKH} = \beta$ ta có

$$MK = MA \cdot \cos \frac{\alpha}{2}; MH = MK \cdot \sin \beta = MA \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA^2}{MI} = MA \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta \Leftrightarrow \frac{MA}{MI} = \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta \Leftrightarrow \frac{\sqrt{d^2 - R^2}}{d} = \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta.$$

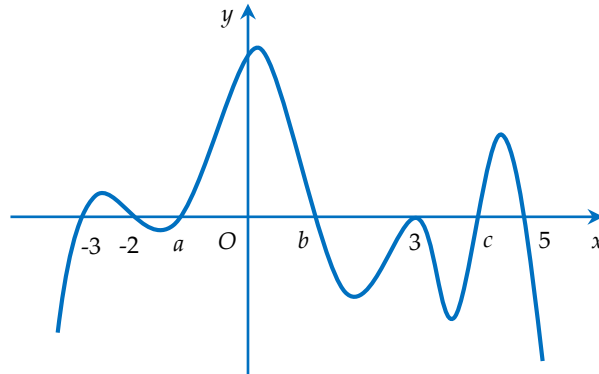
5. Trên mặt phẳng (P) chứa đường tròn (C) , ta lấy một điểm N thay đổi nằm ngoài mặt cầu (S) . Từ N kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu với tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C') . Nếu hai đường tròn (C) và (C') có cùng bán kính thì điểm N di chuyển trên đường tròn tâm H , bán kính r' .



Ta có $IH = \frac{R^2}{d}$ (theo 1.ii) và $IM = IN = d$ (do (C) và (C') có cùng bán kính).

$$\text{Suy ra } r' = HN = \sqrt{IN^2 - IH^2} = \sqrt{d^2 - \frac{R^4}{d^2}} \rightarrow r' = \frac{\sqrt{d^4 - R^4}}{d}.$$

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3; -2; a; b; 3; c; 5$ với $-\frac{4}{3} < a < -1; 1 < b < \frac{4}{3}; 4 < c < 5$ có dạng như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có 7 điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. Vô số.

STUDY TIP

Tổng quát:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)f_1(x)$

với $f_1(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (hoặc $f_1(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$) và

$x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Khi đó, với hàm số $y = h(x) = f(|x| + m)$

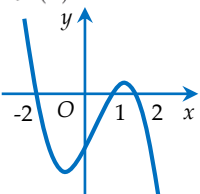
có $+ 2n + 1$ điểm cực trị thì $m < x_1$.

$+ 2l + 1 (0 < l < n)$ điểm cực trị thì $x_k \leq m < x_{k+1}$ với $l = n - k$ hay $k = n - l$.

$+ \text{Đúng 1 điểm cực trị thì } m > x_n$.

✓ CHECKPOINT 47

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị.

Xem thêm bài 55, 56 trong phần "Bài tập rèn luyện".

Lời giải

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm

$$-3; -2; a; b; c; 5.$$

Xét hàm số $y = g(x) = f(2|x| + m - 3)$

$$g'(x) = \frac{2x}{|x|} \cdot f'(2|x| + m - 3).$$

Khi đó, để xác định số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ ta cần xác định số nghiệm

$$\text{của hệ } \begin{cases} x = 0 \\ 2|x| + m - 3 \in \{-3; -2; a; b; c; 5\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x| \in \left\{ \frac{-m}{2}; \frac{-m+1}{2}; \frac{a+3-m}{2}; \frac{b+3-m}{2}; \frac{c+3-m}{2}; \frac{8-m}{2} \right\} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } x_1 = \frac{-m}{2}; x_2 = \frac{-m+1}{2}; x_3 = \frac{a+3-m}{2}; x_4 = \frac{b+3-m}{2}; x_5 = \frac{c+3-m}{2}; x_6 = \frac{8-m}{2}.$$

Ta có $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

Với mỗi $i = 1; 2; \dots; 7$

Nếu $x_i > 0$ phương trình $|x| = x_i$ có hai nghiệm phân biệt $x = \pm x_i$, dẫn đến $x = \pm x_i$ là hai điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

Nếu $x_i = 0$ phương trình $|x| = x_i$ có duy nhất $x = 0$, dẫn đến $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

Nếu $x_i < 0$ phương trình $|x| = x_i$ vô nghiệm.

Do đó, hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow x_3 \leq 0 < x_4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+3-m}{2} \leq 0 \\ \frac{b+3-m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a+3 \leq m < b+3 \Rightarrow -1+3 \leq m < \frac{4}{3}+3.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn là 2;3;4.

Đáp án B.

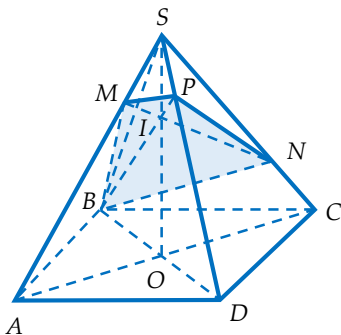
Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI = \frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I . (α) cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Gọi m, n lần lượt là GTLN, GTNN của $V_{S.MBNP} : V_{S.ABCD}$. Tính $\frac{m}{n}$

A. 2.

B. $\frac{7}{5}$.

C. $\frac{9}{5}$.

D. $\frac{8}{5}$.



STUDY TIP

Có thể sử dụng công thức

$$\frac{V_{S.MBNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$$

với $a = \frac{SA}{SM}$, b, c, d tương tự.

Xem thêm bài 57 trong phần "Bài tập rèn luyện".

Lời giải +) Đặt $\begin{cases} \frac{SA}{SM} = x \\ \frac{SC}{SN} = y \end{cases}, (x, y \geq 1).$

$$+) \text{ Có } \frac{SB}{SB} + \frac{SD}{SP} = 2 \frac{SO}{SI} = 2.3 = 6 \Rightarrow \frac{SD}{SP} = 5.$$

$$+) \text{ Có } x + y = 2 \frac{SO}{SI} = 6 \Leftrightarrow y = 6 - x, 1 \leq x \leq 5.$$

$$+) \frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x+1+y+5}{4 \cdot x \cdot 1 \cdot y \cdot 5} = \frac{12}{20xy} = \frac{3}{5xy} = \frac{3}{5x(6-x)} = \frac{3}{5(6x-x^2)}.$$

$$+) \text{ Xét } f(x) = \frac{3}{5(6x-x^2)}, \text{ với } 1 \leq x \leq 5. \text{ Có } f'(x) = \frac{-3}{5} \cdot \frac{6-2x}{(6x-x^2)^2}.$$

$$+) \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 1 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$+) f(1) = \frac{3}{25}; f(3) = \frac{1}{15}; f(5) = \frac{3}{25} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{25} \\ n = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{9}{5}.$$

Đáp án C.

Câu 49: Cho hai hàm số $y = \ln \left| \frac{x-2}{x} \right|$ và $y = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020$, với m là tham số thực. Gọi $(C_1), (C_2)$ lần lượt là các đồ thị của hai hàm số trên. Khi đó, tổng các giá trị nguyên của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại một điểm duy nhất bằng

A. 2019.

B. 2020.

C. 1011.

D. 1010.

Lời giải Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$$\ln \left| \frac{x-2}{x} \right| = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020 \Leftrightarrow \frac{1}{4x} - \frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| = m - 505 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4x} - \frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right|$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{4x^2} + \frac{3}{4(x-2)^2} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right] = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x(x-2)} \right] \\ &= \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2(x-2)^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2(x-2)^2} \end{aligned}$$

Khi đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{4} \ln 3$	$\searrow -\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow -\infty$	$\nearrow 0$

✓ CHECKPOINT 49

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $mx^4 - 4x + m = 0$ có nghiệm.

Xem thêm bài 58 trong phần "Bài tập rèn luyện".

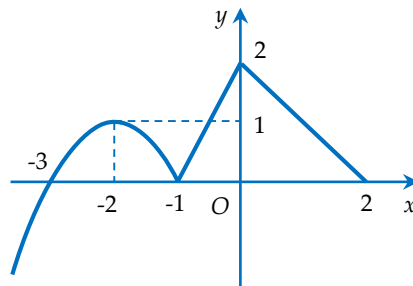
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và

$$\text{chỉ khi } \begin{cases} m - 505 = 0 \\ m - 505 = \frac{1}{4} \ln 3 \\ m - 505 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 505 \\ m = 505 + \frac{1}{4} \ln 3 \\ m = 506 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu là $505 + 506 = 1011$.

Đáp án C.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3; 2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(-3) = 0$, giá trị của $f(-1) + f(1)$ bằng

A. $\frac{23}{6}$.

B. $\frac{31}{6}$.

C. $\frac{35}{3}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Cách 1: Giải bằng phương pháp tự luận dùng nguyên hàm

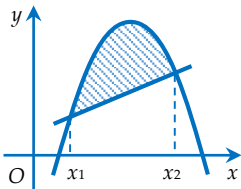
Ta xác định biểu thức của hàm số $y = f'(x)$. Từ hình vẽ ta thấy trên $[-3; 2]$ đồ thị gồm 3 nhánh:

- Nhánh parabol $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ xác định trên $[-3; -1]$ đi qua 3 điểm $(-3; 0)$, $(-2; 1)$ và $(-1; 0)$.

- Nhánh đường thẳng $y = a_2x + b_2$ xác định trên $[-1; 2]$ đi qua 2 điểm $(-1; 0)$ và $(0; 2)$.

STUDY TIP

Một nhược điểm của công thức (1) là chỉ có thể tính được diện tích khi “lát cắt” parabol song song với trục Ox . Trường hợp “lát cắt” bất kỳ, diện tích hình giới hạn bởi một đường thẳng và parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 (như hình minh họa) ta có diện tích được cho bởi công thức $S = \frac{|a||x_1 - x_2|^3}{6}$ (2)



Với công thức tính nhanh diện tích “lát cắt parabol”, ta có thể xây dựng bài toán tương tự với đồ thị liên tục gồm các nhánh là đường thẳng hoặc parabol.

Xem thêm bài 59, 60 trong phần “Bài tập rèn luyện”.

- Nhánh đường thẳng $y = a_3x + b_3$ xác định trên $[0; 2]$ đi qua 2 điểm $(0; 2)$ và $(2; 0)$.

Từ đây, giải các hệ phương trình tương ứng ta suy ra biểu thức của $f'(x)$ là:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3 & \text{khi } -3 \leq x \leq -1 \\ 2x + 2 & \text{khi } -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$, do đó biểu thức của $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x + C_1 & \text{khi } -3 \leq x \leq -1 \\ x^2 + 2x + C_2 & \text{khi } -1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x + C_3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Vì $f(-3) = 0$ nên ta có: $-\frac{(-3)^3}{3} - 2(-3)^2 - 3(-3) + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$.

Do f liên tục tại $x = -1$ nên ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, suy ra:

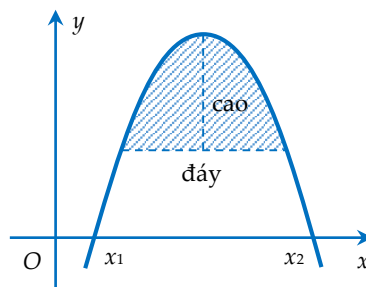
$$-\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 - 3(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + C_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{7}{3}.$$

Tương tự, f liên tục tại $x = 0$ nên ta có: $0^2 + 2 \cdot 0 + \frac{7}{3} = -\frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 + C_3 \Leftrightarrow C_3 = \frac{7}{3}$.

$$\text{Vậy } f(-1) + f(1) = \left[(-1)^2 + 2(-1) + \frac{7}{3} \right] + \left[-\frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 + \frac{7}{3} \right] = \frac{31}{6}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng phương pháp đánh giá diện tích trên đồ thị

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một parabol và một đường thẳng có phương song song với trục Ox được cho bởi công thức: $S = \frac{2}{3}$ đáy $\times$ cao (1)



Áp dụng công thức này ta giải nhanh bài toán này như sau:

Nhánh parabol $y = ax^2 + bx + c$ qua 3 điểm $(-3; 0)$, $(-2; 1)$ và $(-1; 0)$ nên ta tính ra được hệ số $a = -1$.

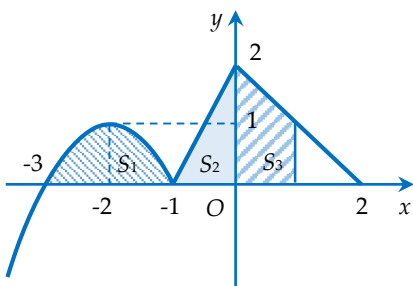
Ta có:

$$f(-1) + f(1) = [f(-1) - f(-3)] + [f(1) - f(-3)] = S_1 + (S_1 + S_2 + S_3).$$

$$\text{Với: } S_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4}{3}, S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1, S_3 = \frac{1}{2} (1 + 2) \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } f(-1) + f(1) = \frac{31}{6}.$$

Đáp án B.



III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^3 - 3x + 2$. B. $y = x^4 + 2x^2 + 2$.
C. $y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 1$. D. $y = -x^3 - 2x^2 + 5x - 2$.

2. Hàm số $y = -\frac{1}{x}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $\mathbb{R}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Hàm số $y = (4x^2 - 1)^4$ có tập xác định là

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

4. Tập xác định của hàm số $y = (4 - 3x - x^2)^{2021}$ là:

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-4; 1)$.
C. $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$. D. $[-4; 1]$.

5. Tính $z = 3 + 2i + (6 + i)(5 + i)$.

- A. $30 + 10i$. B. $32 + 13i$. C. $33 + 13i$. D. $33 + 12i$.

6. Số phức $(1 + 2i)(2 - 3i)$ bằng

- A. $8 - i$. B. 8 . C. $8 + i$. D. $-4 + i$.

7. Cho số phức $z = (1 + i)^2(1 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là

- A. 2 . B. 4 . C. $2i$. D. -4 .

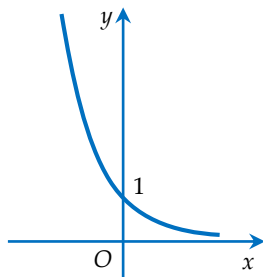
8. Kết quả của phép tính $\frac{(2 - i)^2(2i)^4}{1 - i}$ là:

- A. $7 - i$. B. $56 - i$. C. $7 + i$. D. $56 + 8i$.

9. Rút gọn số phức $z = \frac{3 - 2i}{1 - i} - \frac{1 + i}{3 + 2i}$ ta được

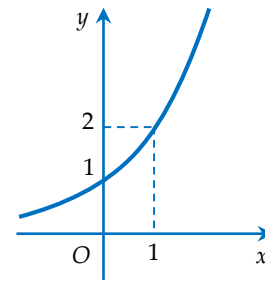
- A. $z = \frac{55}{26} + \frac{15}{26}i$. B. $z = \frac{75}{26} + \frac{15}{26}i$.
C. $z = \frac{75}{26} + \frac{11}{26}i$. D. $z = \frac{55}{26} + \frac{11}{26}i$.

10. Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ ở dưới đây?



- A. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$. B. $y = (\sqrt{2})^x$.
C. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. D. $y = 3^x$.

11. Đường cong trong hình sau là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = (\sqrt{2})^x$. B. $y = \log_2(2x)$.
C. $y = 2^x$. D. $y = \frac{1}{2}x + 1$.

12. Điểm $M(1; e)$ thuộc đồ thị hàm số nào dưới đây?

- A. $y = 2^{-x}$. B. $y = e^x$. C. $y = \ln x$. D. $y = x^{-2}$.

13. Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

- A. $\pi r^2 h$. B. $2\pi r^2 h$. C. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. D. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$.

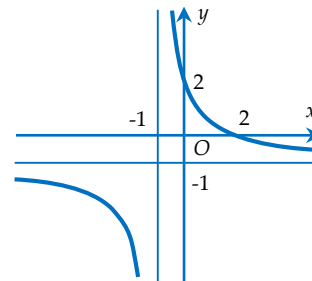
14. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a . Thể tích của khối nón đã cho bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. C. $\frac{2\pi a^3}{3}$. D. $\frac{\pi a^3}{3}$.

15. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 38 học sinh?

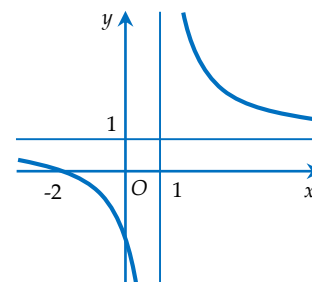
- A. A_{38}^2 . B. 2^{38} . C. C_{38}^2 . D. 38^2 .

16. Đồ thị hình bên là của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = \frac{-x}{x+1}$. B. $y = \frac{-x+1}{x+1}$.
C. $y = \frac{-x+2}{x+1}$. D. $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.

17. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ sau. Giá trị $a+2b+3c$ bằng



- A. -6 . B. 2 . C. 8 . D. 0 .

18. Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

19. Hàm số $y = x^4 + x^2 - 4$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 8 = 0$ có phương trình là

- A. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.
B. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.
C. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.
D. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(5; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 1 = 0$. Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với (P) có phương trình là

- A. $(x-5)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$.
B. $(x-5)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$.
C. $(x+5)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.
D. $(x+5)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

22. Cho a, b là hai số thực khác 0, biết:

$$\left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+ab} = \left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-3ab}. \text{ Tỉ số } \frac{a}{b} \text{ là:}$$

- A. $\frac{1}{7}$. B. $\frac{4}{21}$. C. $\frac{-4}{21}$. D. $\frac{-8}{7}$.

23. Cho x, y là các số thực dương và $x \neq y$. Biểu thức

$$A = \sqrt{(x^{2x} + y^{2x})^2 - \left(4^{\frac{1}{2x}}xy\right)^{2x}}$$
 bằng

- A. $y^{2x} - x^{2x}$. B. $|x^{2x} - y^{2x}|$.
C. $(x-y)^{2x}$. D. $x^{2x} - y^{2x}$.

24. Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1+i)\bar{z} = 3-5i$.

- A. $M(-1; 4)$. B. $M(-1; -4)$.
C. $M(1; 4)$. D. $M(1; -4)$.

25. Cho hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng -3 . Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

- A. $(20; 25)$. B. $(5; 6)$. C. $(6; 9)$. D. $(2; 5)$.

26. Thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính đáy r và chiều cao h bằng

- A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $2\pi r h$. C. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. D. $\pi r^2 h$.

27. Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l bằng

- A. $\pi r l$. B. $4\pi r l$. C. $2\pi r l$. D. $\frac{4}{3}\pi r l$.

28. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a .

- A. $V = \frac{\pi a^3}{4}$. B. $V = \pi a^3$. C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$. D. $V = \frac{\pi a^3}{2}$.

29. Cho hàm số $y = \frac{mx+5}{x-1}$ (C_m). Tìm m để giao điểm của hai tiệm cận của (C_m) thuộc Parabol $(P): y = x^2 - 2x + 2019$.

- A. $m = 2022$. B. $m = 1$.
C. $m = 2018$. D. $m = -2$.

30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SA = AB = a$ và $AD = xa$. Gọi E là trung điểm cạnh SC . Tìm x , biết khoảng cách từ điểm E đến mặt phẳng (SBD) là $d = \frac{a}{3}$.

- A. $x = 4$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 3$.

31. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		-4	-3	-4		$+\infty$	

Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. $A(-3; 0)$. B. $B(-1; -4)$.
C. $C(0; -3)$. D. $D(1; -4)$.

32. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-$	-2	3	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			4	-2		$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.
D. Hàm số không có cực trị.

33. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$		0	$-\frac{5}{2}$		0		$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. $-\frac{5}{2}$. B. 1 . C. 0 . D. -1 .

34. Tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+m}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là

- A. $(-2; 1)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-2; -1)$. D. $(-\infty; -1)$.

35. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và đường thẳng $y = -2x + m$.

Tìm giá trị của m để đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt, đồng thời trung điểm của đoạn thẳng AB có hoành độ bằng $\frac{5}{2}$.

- A. $m = -9$. B. $m = 9$. C. $m = 8$. D. $m = 10$.

36. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = 4$. D. $I = \frac{1}{2}$.

37. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số m để trên đồ thị C_m của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m-3)x + 10$ có hai điểm nằm về hai phía của trục tung mà tiếp tuyến của C_m tại hai điểm đó cùng vuông góc với đường thẳng $(d): x + 2y + 2020 = 0$

- A. 2022. B. 2020. C. 2019. D. 2021.

38. Cho biết năm 2003, Việt Nam có 80902400 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47% Hời năm 2021, Việt Nam sẽ có bao nhiêu người, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm là không đổi?

- A. 100861000. B. 104354624. C. 105205705. D. 106752229.

39. Tất cả các học sinh của lớp 10A1 đều học giỏi ít nhất một trong hai môn Toán hoặc tiếng Anh. Lớp có đúng 30 bạn giỏi Toán, 25 bạn giỏi tiếng Anh và có 16 bạn giỏi cả hai môn Toán và tiếng Anh. Số học sinh của lớp 10A1 là

- A. 46. B. 39. C. 55. D. 41.

40. Trong một trường THPT X, tỷ lệ học sinh giỏi Ngữ văn là 9%, học sinh giỏi Toán là 12% và học giỏi cả hai môn là 7%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường THPT X. Tính xác suất để học sinh được chọn hoặc giỏi Toán hoặc giỏi Ngữ văn.

- A. 0,21. B. 0,28. C. 0,14. D. 0,108.

41. Xét hai biến cố A và B , với $\bar{B}$ là biến cố đối của B . Biết $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$ và $P(\bar{B}) = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của $P(A)$.

- A. $\frac{7}{16}$. B. $\frac{7}{8}$. C. $\frac{11}{16}$. D. $\frac{5}{16}$.

42. Cắt mặt cầu $S(I; R)$ bởi mặt phẳng cách I một khoảng bằng nửa bán kính ta thu được thiết diện là đường tròn có chu vi bằng bao nhiêu?

- A. πR . B. $\sqrt{3}\pi R$. C. $2\pi R$. D. $2\sqrt{3}\pi R$.

43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{1}{2}a$. Mặt cầu (S) tâm A cắt mặt phẳng (SBC) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng a . Bán kính của (S) bằng

- A. $\frac{\sqrt{42}a}{6}$. B. $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. C. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{7}a}{2}$.

44. Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 - mx + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq 1$. B. $m > 1$. C. $m \geq 0$. D. $m > 0$.

45. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 2020 của tham số thực m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 10$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$?

- A. 2020. B. 2018. C. 2019. D. 2017.

46. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 4m$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ là

- A. $(4; +\infty)$. B. $[4; +\infty)$. C. $(-\infty; -8]$. D. $(-\infty; -8)$.

47. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 3]$ để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (m-9)x + 2019$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 9. B. 13. C. 8. D. 14.

48. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-100; 100]$ để hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

- A. 101. B. 100. C. 99. D. 98.

49. Cho $f(x) = \frac{2018^x}{2018^x + \sqrt{2018}}$. Giá trị của

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right)$$
 là

- A. 2017. B. 1008. C. $\sqrt{2016}$. D. 1006.

50. Cho biểu thức $f(x) = \frac{1}{2018^x + \sqrt{2018}}$. Tính tổng sau

$$S = \sqrt{2018} [f(-2017) + f(-2016) + \dots + f(0) + f(1) + \dots + f(2018)]$$

- A. $S = 2018$. B. $S = \frac{1}{2018}$.

- C. $S = \sqrt{2018}$. D. $S = \frac{1}{\sqrt{2018}}$.

51. Cho hàm số $f(x) = 3^x - 3^{-x}$. Gọi $m_1; m_2$ là các giá trị thực của tham số m để $f(3\log_2 m) + f(\log_2^2 m + 2) = 0$. Tính $T = m_1 \cdot m_2$.

- A. $T = \frac{1}{8}$. B. $T = \frac{1}{4}$. C. $T = \frac{1}{2}$. D. $T = 2$.

52. Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{7+3x} - \sqrt[3]{7-3x} + 2019x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f(x^3 - 2x^2 + 3x - m) + f(2x - 2x^2 - 5) < 0, \forall x \in (0; 1)$. Số phần tử của S là

- A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1; 1; 2)$. Tổng

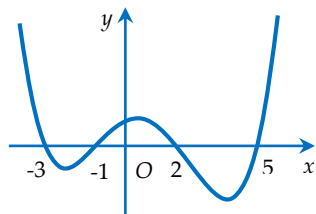
$$T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

- A. $T = 30$. B. $T = 26$. C. $T = 20$. D. $T = 21$.

54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 24$ và điểm $M(-2; 0; -2)$. Từ M kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_1) . Từ điểm N di động nằm ngoài (S) và nằm trên mặt phẳng chứa (C_1) , kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_2) . Biết khi (C_1) và (C_2) có cùng bán kính thì N luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

- A. $r = 6\sqrt{2}$. B. $r = 3\sqrt{10}$. C. $r = 3\sqrt{5}$. D. $r = 3\sqrt{2}$.

55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f(|x| + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng 7 điểm cực trị?



- A. 2. B. 3. C. 1. D. Vô số.

56. Xét các số thực $c > b > a > 0$. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm

như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(|x^3|)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là

x	$-\infty$	0	a	b	c	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- A. 3. B. 7. C. 4. D. 5.

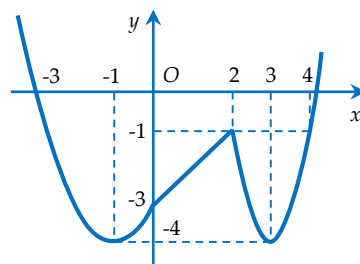
57. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy góc 60° . Gọi M là điểm đối xứng với C qua D ; N là trung điểm của SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích giữa 2 phần đó.

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{7}{3}$. C. $\frac{1}{7}$. D. $\frac{7}{5}$.

58. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-10; 10]$ của tham số a để đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$ cắt parabol $y = x^2 - ax$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ cùng lớn hơn -1 ?

- A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

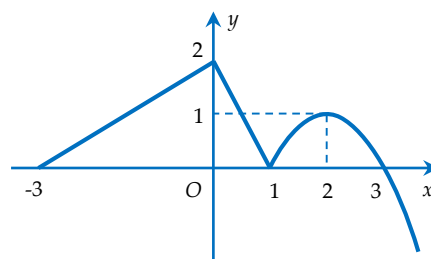
59. Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3; 4]$ như hình vẽ (hai nhánh cong của đồ thị là parabol)



Biết $f(-3) = 1$, giá trị của $f(0) + f(3)$ bằng

- A. $\frac{77}{3}$. B. -23 . C. $-\frac{65}{3}$. D. 27.

60. Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3; 3]$ như hình vẽ (phần đường cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(3) = 0$, giá trị của $f(-1) + f(1)$ bằng

- A. $\frac{8}{3}$. B. $-\frac{16}{3}$. C. $-\frac{8}{3}$. D. $\frac{16}{3}$.

GỢI Ý GIẢI CHECKPOINT

ĐỀ SỐ 1

CHECKPOINT 1 Có. Đây là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 0$.

CHECKPOINT 2 TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

$-\infty \nearrow 0 \searrow -4 \nearrow +\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$; đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

CHECKPOINT 3 $y = (x^2 - 3)^{-2}$.

Vì $-2 < 0$ nên hàm số xác định $x^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

CHECKPOINT 5

Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

CHECKPOINT 11

Số tập con gồm 23 phần tử của tập hợp S bằng C_{2019}^{23} .

CHECKPOINT 14 TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4(x-3)^3$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4(x-3)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	-	0	+

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực trị là $I(3; 0)$.

CHECKPOINT 17

Phương trình mặt phẳng $(Oyz): x = 0$

Bán kính mặt cầu là

$$R = d(I; (Oyz)) = 1.$$

Phương trình mặt cầu là

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 1.$$

CHECKPOINT 18
$$P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{a^{12}b^6}}$$

$$= \frac{a^3b^2}{\left(\sqrt{a^{12}b^6}\right)^{1/3}} = \frac{a^3b^2}{\left(a^{12}b^6\right)^{1/6}} = \frac{a^3b^2}{a^2b} = ab.$$

CHECKPOINT 19 Ta có $z = \frac{4+3i}{2-i}$

$$\Rightarrow |z| = \frac{|4+3i|}{|2-i|} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

CHECKPOINT 20

Nếu $m = 1$ thì $y = 1$ (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8)

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục

trên $[1; 2]$ và $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1; 2]$.

Do vậy $\min_{x \in [1; 2]} y + \max_{x \in [1; 2]} y = y(1) + y(2)$

$$= \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5}.$$

CHECKPOINT 25 Đồ thị hàm số có tiệm

cận ngang $y = \frac{m}{2}$

$$\text{Do đó } \frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 2$$

CHECKPOINT 26

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \sqrt{2x+3} dx = \int (2x+3)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x+3)^3} + C. \end{aligned}$$

CHECKPOINT 28

Quan sát bảng biến thiên ta thấy:

- Điểm cực đại, cực tiểu của hàm số lần lượt là: $x = -2, x = 1$.

- Cực đại, cực tiểu (hay giá trị cực đại, giá trị cực tiểu) của hàm số lần lượt là $y = 3, y = 1$.

- Điểm cực đại của đồ thị hàm số là: $(-2; 3)$; điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là: $(1; 0)$.

CHECKPOINT 30 Hoành độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + m$ và (C) là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x}{x-1} = -x + m \quad (1)$$

Với $x \neq 1$ phương trình (1)

$$\Leftrightarrow x = (x-1)(-x+m)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + m = 0 \quad (1').$$

Đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (C)

tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1') có 2 nghiệm phân biệt khác

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ 1^2 - m \cdot 1 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}.$$

CHECKPOINT 31 $\int_0^4 f(x) dx = 16$.

Tính $\int_0^2 f(2x) dx$.

$$\text{Đặt } u = 2x \rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \rightarrow u = 0 \\ x = 2 \rightarrow u = 4$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^2 f(2x) dx &= \int_0^4 f(u) \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = 8. \end{aligned}$$

CHECKPOINT 33

Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến cần tìm tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$

$\Rightarrow$ Hệ số góc của Δ là:

$$y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 + 3 = 3(x_0 + 1)^2$$

$$\text{Để } \Delta \perp d \text{ thì } (k-3) \cdot 3 \cdot (x_0 + 1)^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 3(k-3)x_0^2 + 6(k-3)x_0 + 3k - 8 = 0 \quad (*)$$

Ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có ít nhất 1 nghiệm x_0 .

+ Với $k = 3$ thì (*) trở thành:

$$1 = 0 \text{ (vô lí)}$$

+ Với $k \neq 3$, để (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9(k-3)^2 - 3(k-3)(3k-8) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(k-3)[3(k-3) - (3k-8)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow k - 3 \leq 0 \Leftrightarrow k \leq 3$$

Vậy $k \leq 3$.

CHECKPOINT 35 Sau 2 năm, tổng số tiền người này có được:

$$A_1 = 200(1 + 2,1\%) = 236,176 \text{ triệu.}$$

Sau 3 năm nữa, tổng số tiền người này có được: $A_2 = A_1 \cdot (1 + 0,65\%)^{36}$

$$= 298,2167 \text{ triệu}$$

Vậy tiền lãi sau 5 năm: 98,2167 triệu.

CHECKPOINT 43

+ 10s đầu vật đi được quãng đường:

$$S_1 = \int_0^{10} 5t dt = 250 \text{ (m)}$$

+ Đi thêm 1s nữa thì dừng hẳn. Khi đó quãng đường vật đi được trong 1s là:

$$S_2 = \int_0^1 (50 - 50t) dt = 25 \text{ (m)}$$

+ Quãng đường S đi được từ khi bắt đầu đến khi kết thúc là:

$$S = S_1 + S_2 = 250 + 25 = 275 \text{ (m)}$$

CHECKPOINT 46 Mặt cầu (S) có tâm

$$I(1; 2; 3) \text{ và bán kính } R = \sqrt{\frac{14}{3}}.$$

Do $A(x_0; y_0; z_0) \in d$ nên

$A(4+3t; 4+2t; 4+t)$, mà $x_0 > 0$ nên

$$4+3t > 0 \Leftrightarrow t > -\frac{4}{3}.$$

Gọi cạnh của tứ diện đều $ABCD$ là m ($m > 0$).

Gọi J là tâm của của tam giác đều BCD thì ta có $IA \perp (BCD)$ tại J và

$$JA = JB = JC = \frac{m\sqrt{3}}{3}.$$

Do $\triangle ACI$ vuông tại C có CJ là đường cao nên $\triangle IJC \sim \triangle ICA$ nên

$$\frac{IC}{IA} = \frac{JC}{CA} = \frac{m\sqrt{3}}{3m} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow IA = \sqrt{3}IC = \sqrt{3}R = \sqrt{14}.$$

Lại có

$$IA^2 = (3t+3)^2 + (2t+2)^2 + (t+1)^2 = 14(t+1)^2$$

$$\Rightarrow IA^2 = 14 \Leftrightarrow (t+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-2 \end{cases}.$$

Mà $t > -\frac{4}{3}$ nên chọn $t=0$.

Vậy $A(4; 4; 4)$.

CHECKPOINT 47

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $y = f(x)$

đạt cực trị tại các điểm $-2; 1; 2$.

Xét hàm số $y = g(x) = f(|x| + m)$

$$g'(x) = \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x| + m).$$

Khi đó, để xác định số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ ta cần xác định số

ng nghiệm của hệ $\begin{cases} x=0 \\ |x|+m \in \{-2; 1; 2\} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ |x| \in \{-2-m; 1-m; 2-m\} \end{cases}$$

Đặt $x_1 = -2-m; x_2 = 1-m; x_3 = 2-m$.

Ta có $x_1 < x_2 < x_3$.

Với mỗi $i = 1; 2; 3$

Nếu $x_i > 0$ phương trình $|x| = x_i$ có hai nghiệm phân biệt $x = \pm x_i$, dẫn đến $x = \pm x_i$ là hai điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

Nếu $x_i = 0$ phương trình $|x| = x_i$ có duy nhất $x = 0$, dẫn đến $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

Nếu $x_i < 0$ phương trình $|x| = x_i$ vô nghiệm.

Do đó, hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm

$$\text{cực trị} \Leftrightarrow x_1 \leq 0 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2-m \leq 0 \\ 1-m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq m < 1.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $-2; -1; 0$.

CHECKPOINT 49 Ta có $mx^4 - 4x + m = 0$

$$\Leftrightarrow m(x^4 + 1) = 4x \Leftrightarrow m = \frac{4x}{x^4 + 1}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{4x}{x^4 + 1}.$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-12x^4 + 4}{(x^4 + 1)^2}$$

Khi đó $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -12x^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	0	$-\sqrt[4]{27}$	$\sqrt[4]{27}$	0	

Từ bảng biến thiên phương trình đã cho có nghiệm khi $-\sqrt[4]{27} \leq m \leq \sqrt[4]{27}$.

ĐỀ SỐ 2

CHECKPOINT 1

Điều kiện: $3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$.

Vậy TXĐ: $D = (0; 3)$.

CHECKPOINT 2 $y = \log_{0,5} x^2$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{x^2 \ln 0,5} \cdot 2x = \frac{2}{x \ln 0,5}$$

CHECKPOINT 4 Xét thương

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)^2}{2n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

luôn thay đổi khi n thay đổi nên đây dãy số (u_n) với $u_n = 2n^2$ không phải là một cấp số nhân.

CHECKPOINT 7 Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục MN ta thu được khối trụ tròn xoay có bán kính

$$r = \frac{1}{2} AB = 6 \text{ và độ dài chiều cao}$$

$$h = AD = 10. \text{ Do đó, thể tích khối trụ tròn xoay là } V = \pi r^2 h = 360\pi.$$

CHECKPOINT 9

- Điểm cực đại của hàm số là $x = -1$, điểm cực tiểu của hàm số là $x = -3$.

- Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1; 1)$, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-3; 0)$.

CHECKPOINT 11

$$y' = 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (t/m)} \\ x = -\frac{2}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$f(2) = -3; f(1) = 0; f(3) = 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$ bằng -3 ; giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$ bằng 2 .

CHECKPOINT 13 Ta có

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1-3x}{x+2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1-3x}{x+2} = -\infty$$

nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{x+2} = -3; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-3x}{x+2} = -3 \text{ nên}$$

đường thẳng $y = -3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

CHECKPOINT 18

$$\int x \cos^2 x dx = \int x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x dx + \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx$$

$$\text{Tính } \int x \cos 2x dx = \int x d\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)$$

$$= \frac{1}{2} x \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx$$

$$= \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow \int f(x)$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x \right) + C$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

CHECKPOINT 20 Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)-1} = -\frac{1}{2}$$

và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)-1}$ không hữu hạn. Do

đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ chỉ có

một đường tiệm cận ngang $y = -\frac{1}{2}$.

Mặt khác: phương trình $f(x)-1=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$ nên đồ thị

hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ chỉ có một đường

tiệm cận đứng $x=0$.

CHECKPOINT 21

$$\log_3^2 x - 2\log_3 x - 7 = 0 \quad (x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 + 2\sqrt{2} \\ \log_3 x = 1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{1+2\sqrt{2}} \text{ (t/m)} \\ x = 3^{1-2\sqrt{2}} \text{ (t/m)} \end{cases}$$

CHECKPOINT 22 Ta có

$$z_1 \cdot \bar{z}_2^2 = (2+4i)(3+5i)^2 = -152-4i.$$

Vậy phần thực bằng -152 , phần ảo bằng -4 .

CHECKPOINT 23 Ta có $y' = -3x^2 + 6x$.

Gọi đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(m; -m^3 + 3m^2 + 2)$.

Hệ số góc của đường thẳng d là

$$k = y'(m) = -3m^2 + 6m$$

$$= -3(m^2 - 2m + 1) + 3$$

$$= -3(m-1)^2 + 3 \leq 3$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m=1 \Rightarrow M(1; 4)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của (C) là

$$y = 3(x-1) + 4 \Leftrightarrow y = 3x + 1.$$

(Có thể dùng MTCT để tính P)

CHECKPOINT 24

$$\text{Ta có } z_1 + z_2 = \frac{4}{2} = 2; z_1 \times z_2 = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{z_1 + z_2}{z_1 \times z_2} = \frac{2}{\frac{9}{2}} = \frac{4}{9}.$$

CHECKPOINT 25 Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$ nên độ dài đường sinh của hình nón $l = 2a$ và bán kính đáy của hình nón

$$r = \frac{1}{2} \cdot 2a = a.$$

Chiều cao h của hình nón được xác định bởi $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{3}a$.

Thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\sqrt{3} \pi a^3}{3}.$$

CHECKPOINT 26 Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0; 3] \text{ nên}$$

giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số lần lượt là $m = f(0) = -1$,

$$M = f(3) = \frac{5}{4}.$$

CHECKPOINT 32

Đặt $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

$$|z|^2 + z + \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

Vậy (C) là đường tròn có bán kính bằng 1. Do đó hình tròn giới hạn bởi (C) có diện tích bằng π .

CHECKPOINT 33

Số tiền Huy đã vay sau 4 năm học là:

$$A = 4000000 \cdot (1+3\%)^4 \cdot \frac{1-(1+3\%)^4}{1-(1+3\%)}$$

$$= 17,23654324 \text{ (triệu đồng)}$$

Cuối tháng thứ nhất, Huy còn nợ:

$$T_1 = A(1+r') - T$$

Cuối tháng thứ 2, Huy còn nợ:

$$T_2 = A(1+r')^2 - T(1+r') - T$$

...

Cuối tháng thứ n , Huy còn nợ:

$$T_n = A(1+r')^n - T \cdot \frac{(1+r')^n - 1}{r'}$$

Sau 5 năm, Huy trả hết nợ nên ta có:

$$T = A \cdot r' \cdot \frac{(1+r')^{60} - 1}{(1+r')^{60} - 1} = 0,309718 \text{ (triệu đồng)}$$

đồng) = 309718 (đồng)

CHECKPOINT 44

$$+ \int f(x) \cdot e^{2x} dx = F(x) = (x-1)e^x$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot e^{2x} = [(x-1)e^x]' = e^x + (x-1)e^x$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot e^{2x} = x \cdot e^x \Rightarrow f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{(1-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$+ \int f'(x) \cdot e^{2x} dx = \int \frac{1-x}{e^x} \cdot e^{2x} dx$$

$$= \int (1-x)e^x dx = (1-x)e^x + \int e^x dx$$

$$= (1-x)e^x + e^x + C = e^x(2-x) + C.$$

CHECKPOINT 46 Đặt $g(x) = \frac{x}{x^2+1} - m$

Số cực trị của hàm số

$f(x) = \left| \frac{x}{x^2+1} - m \right|$ bằng tổng số cực trị

của hàm $g(x) = \frac{x}{x^2+1} - m$ và số

nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $g(x) = 0$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-m$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-m$
		$-\frac{1}{2}-m$		$\frac{1}{2}-m$	

Hàm số $g(x) = \frac{x}{x^2+1} - m$ có 2 cực trị

và phương trình $g(x) = 0$ có tối đa 2

nghiệm đơn (hoặc bội lẻ). Do đó hàm

số $f(x) = \left| \frac{x}{x^2+1} - m \right|$ có nhiều nhất 4

điểm cực trị.

CHECKPOINT 48

$$\text{Đặt } f'(x) = \sqrt[3]{x+2f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{1+2f(x)}} = \sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{1+2f(x)}} \right) dx = \int (\sqrt[3]{x}) dx$$

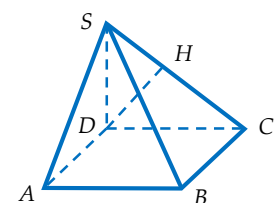
$$\text{Do đó } \frac{3}{4} \sqrt[3]{(2f(x)+1)^2} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C;$$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow (2f(x)+1)^2 = x^4$$

Do đó

$$I = \int_1^4 (2f(x)+1)^2 dx = \int_1^4 x^4 dx = \frac{1}{5}.$$

CHECKPOINT 49



Dựng hình vuông $ABCD$, cạnh bằng x , ta có $SD \perp (ABCD)$; đặt $SD = h$.

Dựng $DH \perp SC \Rightarrow DH \perp (SBC)$.

Ta có $d(A; (SBC)) = d(D; (SBC))$

$$= DH = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{1}{2a^2} (*)$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} h \cdot x^2 = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{h^3}{h^2 - 2a^2}$$

$$\text{Xét } f(h) = \frac{h^3}{h^2 - 2a^2}; (h > a\sqrt{2})$$

$$f'(h) = \frac{h^2(h^2 - 6a^2)}{3(h^2 - 2a^2)^2}$$

h	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{6}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Vậy $f(h)$ nhỏ nhất khi

$$h = a\sqrt{6} \xrightarrow{(*)} x = a\sqrt{3}$$

ĐỀ SỐ 3

CHECKPOINT 3 ĐK: $\begin{cases} \log_2(x-1) > 0 \\ x > 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy tập xác định là $D = (2; +\infty)$.

CHECKPOINT 10 Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho. Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho có bán kính

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \frac{3a}{2}.$$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ có bán kính $R = \frac{3a}{2}$.

CHECKPOINT 11 Điểm M thuộc đồ thị hàm số đã cho và có hoành độ bằng 1 nên $M(1; -1)$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$ nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $k = y'(1) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -3(x-1) - 1 \Leftrightarrow y = -3x + 2$.

CHECKPOINT 17 Hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

CHECKPOINT 19 Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-2x}{x^3-1} = -\frac{2}{3}$,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-2x}{x^3-1} = -\frac{2}{3}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-2x}{x^3-1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-2x}{x^3-1} = 0$ nên

đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số chỉ có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

CHECKPOINT 21

Ta có $z = \frac{3-i}{1+2i} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$. Vậy phần

thực bằng $\frac{1}{5}$ và phần ảo bằng $-\frac{7}{5}$.

CHECKPOINT 23 Ta có

$$f(x) = f(1) \Leftrightarrow f(x) = m, 1 < m < 2.$$

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt. Suy ra phương trình $f(x) = f(1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

CHECKPOINT 26

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính $r = \frac{1}{2} BC = \sqrt{3}a$.

Mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đã cho có bán kính

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4} AA'^2} = 2a.$$

CHECKPOINT 27 Ta có

$$d(I, (P)) = \frac{|3(-1) + 2 - 0 - 10|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{11}.$$

Bán kính của mặt cầu (S) là

$$R = \sqrt{[d(I, (P))]^2 + r^2} = \sqrt{11 + 4} = \sqrt{15}$$

Phương trình mặt cầu (S) là

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 15.$$

CHECKPOINT 28

$$\text{Ta có } \begin{cases} y'(-1) = -4 - 2a = 0 \\ y(-1) = a + b + 1 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}.$$

CHECKPOINT 29

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{m\}$, $y' = \frac{-m-2}{(x-m)^2}$

Hàm số đã cho nghịch biến trên $(5; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0, \forall x \in (5; +\infty) \\ m \leq 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m-2 < 0 \\ m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 5.$$

CHECKPOINT 32

Bất phương trình tương đương

$$(x-1)[m^2(x^3+x^2+x+1) + m(x+1) - 6] \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } f(x) = m^2(x^3+x^2+x+1) + m(x+1) - 6.$$

(1) đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f(1) = 0$

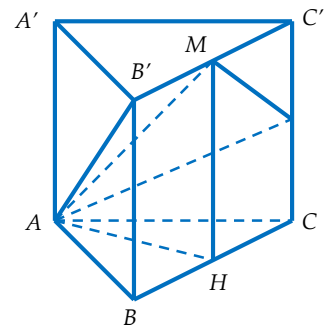
$$\Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

+ Với $m = 1$ thay vào (1) ta được $(x-1)^2(x^2+2x+4) \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $m = 1$ thỏa mãn.

+ Với $m = -\frac{3}{2}$ thay vào (1) ta được $\frac{3}{4}(x-1)^2(3x^2+6x+7) \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $m = -\frac{3}{2}$ thỏa mãn.

$$\text{Vậy } m = 1; m = -\frac{3}{2}$$

CHECKPOINT 34



Gọi H là trung điểm BC , $BC = a\sqrt{3}$, $AH = \frac{a}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ

$$H(0;0;0), A\left(\frac{a}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),$$

$$C\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), M(0;0;a),$$

$$N\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right).$$

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) .

(AMN) có một vtpt

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

(ABC) có một vtpt $\overrightarrow{HM} = (0; 0; 1)$, từ

$$\text{đó } \cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{HM}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1.1} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

CHECKPOINT 43

$$\text{Ta có } y = \frac{3x+5}{x-2} \Rightarrow y = 3 + \frac{11}{x-2}.$$

Suy ra các điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên dương thuộc đồ thị hàm số là $(3; 14); (13; 4)$.

Vậy số đường thẳng cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt mà hai giao điểm đó có hoành độ và tung độ là các số nguyên dương là 1.

CHECKPOINT 48 Ta có:

$$f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2}{f^3(x)} = -x$$

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f^2(x)} \right]' = -x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \frac{f'(0)}{f^2(0)} = -\frac{0^2}{2} + C \Rightarrow C = 0.$$

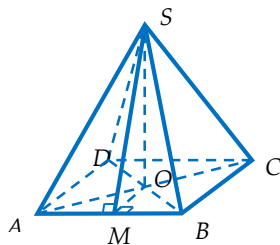
$$\text{Do đó } \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_0^1 = \left(-\frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(0)} = -\frac{1}{6} \Rightarrow f(1) = \frac{6}{7}.$$

CHECKPOINT 50



Gọi $O = AC \cap BD$ thì

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow \text{Góc } SAO = \varphi$$

Gọi trung điểm của AB là M thì $OM \perp AB$ và $SM \perp AB$

Suy ra, góc giữa (SAB) và (ABCD) là góc SMO

Tam giác OAB vuông tại O

$$\Rightarrow OM = \frac{a}{2}; OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \varphi$$

$$\text{Do đó } \tan SMO = \frac{SO}{OM} = \sqrt{2} \tan \varphi$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO$$

$$= \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \tan \varphi$$

ĐỀ SỐ 4

$$\text{CHECKPOINT 3 } y = (x^2 + 1)^{3/4}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{4} \cdot 2x \cdot (x^2 + 1)^{-1/4} = \frac{3}{2} x \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 1}}$$

CHECKPOINT 13

Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và độ dài trục của hình trụ.

Diện tích xung quanh bằng 4π nên ta có $2\pi rh = 4\pi \Leftrightarrow rh = 2$.

Thiết diện qua trục của hình trụ với hình trụ là một hình vuông nên $h = 2r$.

Suy ra $2r^2 = 2 \Leftrightarrow r = 1$ và $h = 2$.

Diện tích toàn phần của hình trụ đã cho là $S_{tp} = 2\pi r(r + h) = 6\pi$.

CHECKPOINT 17

$$\text{Phương trình } x^4 - 6x^2 + 3 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 3 = m$$

Xét hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 3$

$$\Rightarrow y' = 4x^3 - 12x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = -6 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên phương trình vô nghiệm khi $m < -6$.

$$\text{CHECKPOINT 18 } \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2 = 2x+1$$

$$\Rightarrow 2udu = 2dx \Rightarrow udu = dx$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow u=1; x=4 \Rightarrow u=3$$

$$\Rightarrow \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^3 \frac{1}{u} udu = \int_1^3 du = 2.$$

$$\text{CHECKPOINT 23 TXĐ: } D = [1; 5]$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 5-x = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$f(1) = f(5) = 2; f(3) = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy tập giá trị là } T = [2; 2\sqrt{2}].$$

CHECKPOINT 25

Gọi d là phương trình tiếp tuyến cần tìm tại điểm $M(m; m^3 - 3m + 2)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(m) = 3m^2 - 3$.

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x - 14$ nên suy ra $k = 9$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Với $m = -2 \Rightarrow M(-2; 0)$ và phương

$$\text{trình } d: y = 9(x + 2) \Leftrightarrow y = 9x + 18.$$

Với $m = 2 \Rightarrow M(2; 4)$ và phương trình

$$d: y = 9(x - 2) + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 14 \text{ (loại)}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x + 18$.

CHECKPOINT 28

Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) thì đường tròn lớn có bán kính bằng R .

Theo giả thiết ta có $2\pi R = 4\pi \Leftrightarrow R = 2$

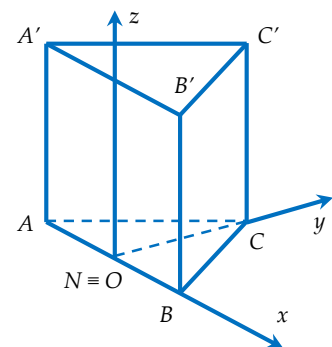
Diện tích mặt cầu (S) là

$$S_{mc} = 4\pi R^2 = 16\pi.$$

CHECKPOINT 29 Để phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu thì $(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2 - m > 0$

$$\Leftrightarrow 9 - m > 0 \Leftrightarrow m < 9.$$

CHECKPOINT 33



Xét hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gắn hệ trục như hình vẽ quy ước $a = 1$ (đơn vị).

$$\text{Ta có } N(0; 0; 0), C\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right),$$

$$M\left(\frac{-1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right), B'\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{-1}{2}\right);$

$\overrightarrow{B'C} = \left(\frac{-1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right); \overrightarrow{NC} = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right).$

Do đó

$d(MN; B'C) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{3\sqrt{5}}{10} a$

CHECKPOINT 35 TXĐ: $D = [-2; 2]$

$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} - x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

$f(2) = 2+m; f(-2) = -2+m;$

$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}+m$

Vậy giá trị lớn nhất là

$2\sqrt{2}+m = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}.$

CHECKPOINT 37

$P = \log_a 2018 + \log_{\sqrt{a}} 2018 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2018$
 $+ \dots + \log_{\sqrt[2018]{a}} 2018$
 $= \log_a 2018 + \log_{a^{1/2}} 2018 + \log_{a^{1/3}} 2018$
 $+ \dots + \log_{a^{1/2018}} 2018$
 $= \log_a 2018 + 2\log_a 2018 + 3\log_a 2018$
 $+ \dots + 2018\log_a 2018$
 $= (1+2+3+\dots+2018)\log_a 2018$
 $= 2019 \cdot \frac{2018}{2} \cdot \log_a 2018$
 $= 2019 \cdot 1009 \cdot \log_a 2018$

CHECKPOINT 44

Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}.$

+) TXĐ: $D = [3; +\infty)$

+) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4}}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2}} = 0.$

Do đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

+) Để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận thì phải có thêm 1 tiệm cận đứng. Vậy yêu cầu bài toán trở thành: Tìm điều kiện để phương trình $x^2+x-m=0$ phải có 1 nghiệm lớn hơn hoặc bằng 3.

TH1: Phương trình $x^2+x-m=0$ phải có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$.

$\Leftrightarrow a.f(3) < 0 \Leftrightarrow 12-m < 0 \Leftrightarrow m > 12.$

TH2: Phương trình $x^2+x-m=0$ có nghiệm $x=3$ thì $m=12$.

Với $m=12$ phương trình trở thành:

$x^2+x-12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-4 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$

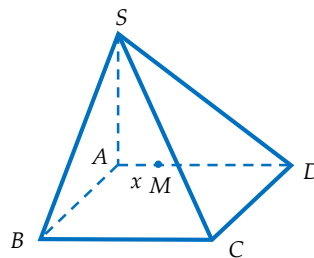
TH3: Phương trình $x^2+x-m=0$ có nghiệm kép $x > 3$.

Khi $m = \frac{-1}{4}$ thì phương trình có

nghiệm $x = \frac{-1}{2}$ (không thỏa mãn)

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận khi $m \geq 12$.

CHECKPOINT 47



Ta có

$S_{ABCM} = \frac{1}{2} AB(AM+BC) = \frac{1}{2} a(x+a)$

$V_{S.ABCM} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCM} = \frac{1}{3} y \cdot \frac{1}{2} a(x+a)$

$= \frac{a}{6} y(x+a) = \frac{a}{6} \sqrt{a^2-x^2} \cdot \sqrt{x+a}$

$= \frac{a}{6} \sqrt{(a^2-x^2)(x+a)^2}$

Xét hàm số

$f(x) = (a^2-x^2)(x+a)^2, (0 \leq x \leq a)$

$f'(x) = -2(x+a)^2(2x-a)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \Rightarrow$ hàm số $f(x)$

đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{a}{2}\right)$ và

nghịch biến trên $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$

$\Rightarrow \max f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{27}{16} a^4$

$\Rightarrow \max V_{S.ABCM} = \frac{a}{6} \sqrt{\frac{27}{16} a^4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$

CHECKPOINT 48

Từ $4x.f(x^2) + 3f(x-1) = \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow 2 \int_0^1 2xf(x^2)dx + 3 \int_0^1 f(1-x)dx$

$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \quad (*)$

+) Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx;$

Với $x=0 \Rightarrow u=0$ và $x=1 \Rightarrow u=1$.

Khi đó

$\int_0^1 2xf(x^2)dx = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx \quad (1)$

+) Đặt $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx;$

Với $x=0 \Rightarrow t=1$ và $x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó

$\int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 f(t)dt = -\int_0^1 f(x)dx \quad (2)$

Thay (1), (2) vào (*) ta được:

$2 \int_0^1 f(x)dx + 3 \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{5} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{20}.$

CHECKPOINT 49

Ta có $g'(x) = (2x+1) \cdot f'(x^2+x-2).$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x^2+x-2) \geq 0 \forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2(x^2+x)$

$\times \left((x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5 \right) \geq 0$
 $\forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2$

$+ m(x^2+x-2) + 5 \geq 0 \quad (1) \forall x \in (1; +\infty)$

Đặt $t = x^2+x-2, x \in (1; +\infty) \Rightarrow t > 0$.

Khi đó (1) trở thành

$t^2 + mt + 5 \geq 0 \quad \forall t \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow t + \frac{5}{t} \geq -m \quad (2) \quad \forall t \in (0; +\infty)$

Để (1) nghiệm đúng với mọi $x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow (2)$ nghiệm đúng với mọi $t \in (0; +\infty)$.

Ta có $h(t) = t + \frac{5}{t} \geq 2\sqrt{5} \quad \forall t \in (0; +\infty).$

Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{5}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{5}.$

Suy ra $\min_{t \in (0; +\infty)} (h(t)) = 2\sqrt{5}.$

Vậy (2) nghiệm đúng với mọi $t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow m \geq -2\sqrt{5}.$

ĐỀ SỐ 5

CHECKPOINT 1 TXĐ: $D = \mathbb{R}.$

Ta có $y' = 3x^2 - 3.$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có $y'' = 6x \Rightarrow y''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow$ Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $A(1; 2018)$.

$y''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1 \Rightarrow$ Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $B(-1; 2022)$.

CHECKPOINT 3 Từ $u_n = 12n - 1$ suy ra $u_1 = 12 \cdot 1 - 1 = 11$ và công sai $d = u_{n+1} - u_n = [12(n+1) - 1] - (12n - 1) = 12$

CHECKPOINT 10 $a = \log_2 5$;

$$b = \log_2 9 = 2 \log_2 3 \Rightarrow \log_2 3 = \frac{b}{2}$$

$$\text{Ta có } \log_2 \frac{40}{3}$$

$$= \log_2 40 - \log_2 3 = \log_2 (5 \cdot 2^3) - \log_2 3 = \log_2 5 + \log_2 2^3 - \log_2 3 = a - \frac{1}{2}b + 3$$

CHECKPOINT 12

$$z_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow -2z_0 = -1 + \sqrt{2}i.$$

$$\text{Vậy } M = (-1; \sqrt{2}).$$

CHECKPOINT 14

Độ dài đường sinh của hình nón là

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = 25a.$$

Diện tích toàn phần của hình nón là

$$S_{tp} = \pi r^2 + \pi r l = 224\pi a^2.$$

CHECKPOINT 15 Số cách chọn ra 4 viên bi từ trong hộp là $C_{12}^4 = 495$.

Số cách lấy 4 viên bi có đủ cả ba màu là $C_3^2 C_4^1 C_5^1 + C_3^1 C_4^2 C_5^1 + C_3^1 C_4^1 C_5^2 = 270$.

Suy ra số cách lấy 4 viên bi không đủ cả ba màu là $495 - 270 = 225$.

CHECKPOINT 16

$$S = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} (\sqrt{x})^3 \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$$

CHECKPOINT 23

$$f(x) = \ln \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Điều kiện: } x^4 - 4x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{Có } f'(x) = \frac{4x^3 - 12x^2 + 8x}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta được $x = 1$.

CHECKPOINT 26 $z = -3 + i \Rightarrow \bar{z} = -3 - i$.

CHECKPOINT 29 Xét hai hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = m - 1$ (d)

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			2		-2	
	$-\infty$					$+\infty$

$x^3 - 3x = m - 1$ (1) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d).

Số giao điểm của (C) và (d) chính là số nghiệm của phương trình (1).

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (C) và (d) có ba giao điểm.

Dựa vào BBT ta có

$$-2 < m - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 3$$

CHECKPOINT 34 Dự kiến để hoàn thành công việc trong 25 tháng $\Rightarrow$ Tháng đầu tiên công ty phải hoàn

thành: $A = \frac{1}{25}$ công việc.

Khối lượng công việc hoàn thành ở tháng thứ nhất là $T_1 = A$.

Khối lượng công việc hoàn thành ở tháng thứ 2 là $T_2 = A(1 + 5\%)$.

Khối lượng công việc hoàn thành ở tháng thứ 3 là $T_3 = A(1 + 5\%)^2$.

...

Khối lượng công việc hoàn thành ở tháng thứ n là $T_n = A(1 + 5\%)^{n-1}$.

Để hoàn thành xong công việc thì

$$T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n = 1$$

$$\Leftrightarrow A \left[(1 + 5\%) + (1 + 5\%)^2 + \dots + (1 + 5\%)^{n-1} + 1 \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{25} \cdot \frac{(1 + 5\%)^n - 1}{(1 + 5\%) - 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow (1,05)^n = 2,25$$

$$\Rightarrow n = \log_{1,05} 2,2 \approx 16,6$$

Vậy sẽ hoàn thành công việc ở tháng thứ 17 sau khi khởi công.

CHECKPOINT 35

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{m} \end{cases} (m > 0)$$

Tọa độ ba điểm cực trị: $A(0; m - 1)$,

$$B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1),$$

$$C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1).$$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC .

$$\text{Ta có } H(0; -m^2 + m - 1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \quad (\text{do}$$

$\triangle ABC$ cân tại $A) \Rightarrow AB^2 = 2AH \cdot R$

$$\text{trong đó } \begin{cases} AH = m^2 \\ AB = \sqrt{m + m^4} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } m + m^4 = 4m^4$$

$$\Leftrightarrow 3m^4 = m \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

CHECKPOINT 36 Ta có

$$C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 78$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow n = 12.$$

Với $n = 12$ ta có khai triển của

$$\left(x^2 - \frac{2}{x} \right)^{12}.$$

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$C_{12}^k (x^2)^{12-k} \cdot \left(-\frac{2}{x} \right)^k = C_{12}^k \cdot (-2)^k \cdot x^{24-3k},$$

với $k \in \mathbb{N}$ và $k \leq 12$.

Số hạng này chứa x^9 khi và chỉ khi $24 - 3k = 9 \Leftrightarrow k = 5$ (thỏa mãn).

Vậy số hạng chứa x^9 trong khai triển đã cho là $C_{12}^5 (-2)^5 x^9 = -25344x^9$.

CHECKPOINT 38 Xét hàm số

$$g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(m^2 - 2)x^3 - m^2x^2 + m$$

trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có

$$g'(x) = x^3 + (m^2 - 2)x^2 - 2m^2x^2$$

$$= x(x - 2)(x + m^2) \leq 0, \forall x \in [0; 2].$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên

$$[0;2] \rightarrow \text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} g(0) \leq 5 \\ g(2) \geq -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ 4 + \frac{8}{3}(m^2 - 2) - 4m^2 + m \geq -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{53}}{4} \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{53}}{4}$$

CHECKPOINT 41 Gọi độ dài cạnh của hình lập phương là a .

Thể tích khối lập phương là $V_1 = a^3$.

Mặt cầu ngoại tiếp khối lập phương

có bán kính $R = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ nên có thể tích

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}.$$

CHECKPOINT 42 $z = \frac{(1+i)^{2021} - 1}{i}.$

Ta có $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$

$$\Rightarrow (1+i)^4 = (2i)^2 = -4.$$

Vậy $(1+i)^{2020} = (-4)^{505} = -4^{505}$

$$\Rightarrow z = \frac{-4^{505}(1+i) - 1}{i}.$$

$$= -4^{505} + (4^{505} + 1)i.$$

CHECKPOINT 44 $y' = 3x^2 - 4x + (m-1).$

Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(1;2)$ là: $y = kx - k + 2$.

Điều kiện tiếp xúc của (C_m) và tiếp tuyến là:

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m = kx - k + 2 \quad (1) \\ 3x^2 - 4x + (m-1) = k \quad (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$$

$$= 3x^3 - 4x^2 + (m-1)x$$

$$- 3x^2 + 4x - (m-1) + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3(m-1) = 0(*).$$

Để qua $M(1;2)$ kẻ được đúng 2 tiếp

tuyến với (C_m) thì phương trình (*)

có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Xét $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3(m-1),$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Do đó hàm số $y = f(x)$ luôn có hai

$$\text{điểm cực trị } x = 1; x = \frac{2}{3}.$$

Do đó để (*) có đúng 2 nghiệm phân

$$\text{biệt thì } f(1) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ m = \frac{109}{81} \end{cases}$$

CHECKPOINT 45 Ta có

$$f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x-8) \cdot f'(x^2 - 8x + m).$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng

$$(4; +\infty) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x > 4$$

$$\Leftrightarrow (2x-8) \cdot f'(x^2 - 8x + m) \geq 0, \forall x > 4$$

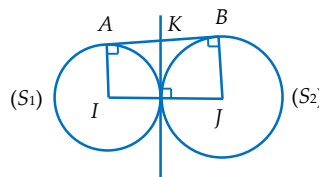
$$\Leftrightarrow f'(x^2 - 8x + m) \geq 0, \forall x > 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + m \leq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ x^2 - 8x + m \geq 2, \forall x \in (4; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \geq 18.$$

Vậy $m \geq 18$.

CHECKPOINT 46



Gọi mặt phẳng (α) là tiếp diện chung

của hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ tại M ,

$$K = AB \cap (\alpha).$$

Khi đó $KA = KB = KM \Rightarrow K$ là trung điểm của AB và M thuộc mặt cầu (S)

đường kính AB .

Ta có $K(0;1;2)$ và bán kính của mặt

$$\text{cầu } (S) \text{ là } R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}}{2} = 3$$

Phương trình mặt cầu

$$(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

Gọi d là đường thẳng qua K và vuông góc với $(P) \Rightarrow$ Phương trình d :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Với mọi điểm $M \in (S)$ thì

$$d(M, (P)) \leq d(K, (P)) + R$$

$$= \frac{|0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2018|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} + 3 = 675$$

Do đó $\max d(M, (P)) = 675$ đạt được

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} M = d \cap (S) \\ d(M, (P)) = 675 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M(m; 1+2m; 2-2m) \\ m^2 + (2m)^2 + (-2m)^2 = 9 \\ \frac{|m + 2(1+2m) - 2(2-2m) + 2018|}{3} = 675 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ M(1; 3; 0) \end{cases}.$$

CHECKPOINT 47 Ta có

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq x - \frac{1}{4}$$

Vậy với $\forall x, y \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$ thì

$$\log_y \left(x - \frac{1}{4}\right) \geq \log_y x^2 = 2 \log_y x$$

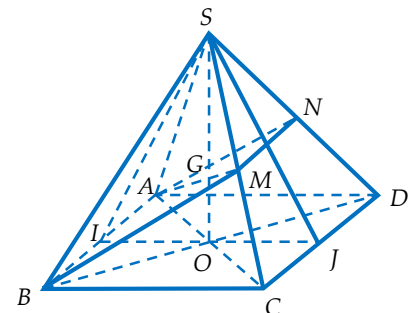
$$\Rightarrow P \geq 2(\log_a b + \log_b c + \log_c a)$$

$$\geq 6\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 6$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Vậy $P_{\min} = 6$.

CHECKPOINT 49



Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Xác định được góc giữa mặt bên (SCD) và đáy là góc $\angle SJI = 60^\circ$

$$\text{Xét tam giác } SIJ \text{ đều: } SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{\Delta ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$$

Trong (SAC) có AG cắt SC tại M

$\Rightarrow M$ là trung điểm SC , chứng minh được $MN \parallel AB$ và N là trung điểm

$$\text{của } SD \Rightarrow V_{SABM} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}.$$

MỤC LỤC

Đề số 1	7
Hướng dẫn giải chi tiết	7
Bài tập rèn luyện	29
Đề số 2	33
Hướng dẫn giải chi tiết	33
Bài tập rèn luyện	54
Đề số 3	58
Hướng dẫn giải chi tiết	58
Bài tập rèn luyện	78
Đề số 4	81
Hướng dẫn giải chi tiết	81
Bài tập rèn luyện	103
Đề số 5	107
Hướng dẫn giải chi tiết	107
Bài tập rèn luyện	128
Đề số 6	132
Hướng dẫn giải chi tiết	132
Bài tập rèn luyện	151
Đề số 7	155
Hướng dẫn giải chi tiết	155
Bài tập rèn luyện	174
Đề số 8	177
Hướng dẫn giải chi tiết	177
Bài tập rèn luyện	197
Đề số 9	200
Hướng dẫn giải chi tiết	200
Bài tập rèn luyện	221
Đề số 10	225
Hướng dẫn giải chi tiết	225
Bài tập rèn luyện	247

Đề số 11	251
Hướng dẫn giải chi tiết	251
Bài tập rèn luyện	271
Đề số 12	275
Hướng dẫn giải chi tiết	275
Bài tập rèn luyện	297
Đề số 13	301
Hướng dẫn giải chi tiết	301
Bài tập rèn luyện	321
Đề số 14	325
Hướng dẫn giải chi tiết	325
Bài tập rèn luyện	346
Đề số 15	350
Hướng dẫn giải chi tiết	350
Bài tập rèn luyện	370
Đề số 16	373
Hướng dẫn giải chi tiết	373
Bài tập rèn luyện	392
Đề số 17	396
Hướng dẫn giải chi tiết	396
Bài tập rèn luyện	415
Đề số 18	419
Hướng dẫn giải chi tiết	419
Bài tập rèn luyện	439
Đề số 19	443
Hướng dẫn giải chi tiết	443
Bài tập rèn luyện	464
Đề số 20	467
Hướng dẫn giải chi tiết	467
Bài tập rèn luyện	488
Bảng đáp án	492
Đáp án bài tập rèn luyện	495
Gợi ý giải Checkpoint	498