MỤC LỤC

Chủ đề 2

Vấn đề cần nắm:

1. Các dạng bài toán đếm
2. Các dạng toán sử dụng công thức tổ hợp
3. Các dạng toán sử dụng nhị thức Newton
4. Các dạng toán về xác suất
5. Liên hệ kiến thức với các tình huống thực tế

TỔ HỢP – XÁC SUẤT

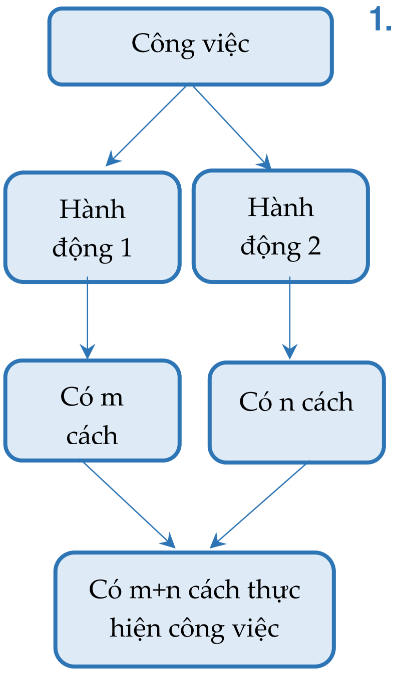
Có lẽ, đây là chủ đề hấp dẫn và thú vị nhất trong chương trình lớp 11 vì hầu hết các bài toán đều được xuất phát từ trong thực tế. Ngoài việc tóm tắt lại những kiến thức cơ bản, quan trọng đã được trình bày chi tiết trong SGK lớp 11, ở chủ đề này, chúng tôi trang bị thêm cho độc giả các dạng câu hỏi trắc nghiệm xuất phát từ các tình huống thực tế trong cuộc sống cùng với những phương pháp giải nhanh tương ứng.

Trong kì thi THPT quốc gia 2018 vừa xong, chủ đề này chiếm phần lớn tỉ lệ chương trình Toán 11 khi chiếm tới 40% số câu hỏi lớp 11 trong đề thi. Vậy nên, việc nắm chắc chủ đề này sẽ tạo đà rất lớn trong quá trình ôn luyện, hướng tới kì thi THPT quốc gia 2019 và 2020. Chúng tôi hy vọng quý độc giả sẽ đầu tư thời gian để đọc một cách nghiêm túc cho chủ đề này.

A. Lý thuyết

§1. Quy tắc đếm

1. Quy tắc cộng



Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m+n$ cách thực hiện.

Chú ý: *Số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là:* $|X|$ hoặc $n(X)$.

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau:

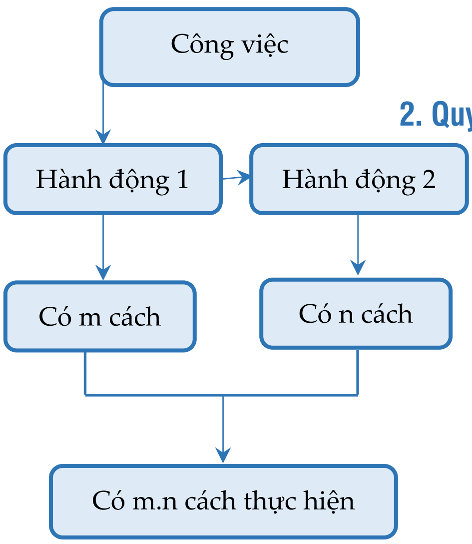
Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau, thì

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B).$$

Mở rộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, hành động A_2 có m_2 cách thực hiện,…, hành động A_k có m_k cách thực hiện và các cách thực hiện của các hành động trên không trùng nhau thì công việc đó có $m_1+m_2+...+m_k$ cách thực hiện.

2. Quy tắc nhân



Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m.n$ cách thực hiện.

Mở rộng

Một công việc được hoàn thành bởi k hành động $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ liên tiếp. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, ứng với mỗi cách thực hiện hành động A_1 có m_2 cách thực hiện hành động A_2,..., có m_k cách thực hiện hành động A_k thì công việc đó có $m_1.m_2...m_k$ cách hoàn thành.

§2. Hoán vị - Chỉnh hợp – Tổ hợp

1. Hoán vị

STUDY TIP
Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp. Chẳng hạn, hai hoán vị abc và acb của ba phần tử a, b, c là khác nhau.

Cho tập hợp A có n phần tử $(n \geq 1)$.
Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một **hoán vị** của n phần tử đó.
Số các hoán vị của tập hợp có n phần tử được kí hiệu là P_n.

Định lý 1

$P_n = n.(n-1)...2.1 = n!$ với P_n là số các hoán vị.

Chứng minh

Việc sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A là một công việc gồm n công đoạn.
Công đoạn 1: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất: n cách.
Công đoạn 2: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai: $(n-1)$ cách.

…

Công đoạn thứ i: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i có $(n-i+1)$ cách.

…

Công đoạn thứ n: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ n có 1 cách.
Theo quy tắc nhân thì có $P_n = n!$ cách sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A, tức là có $n!$ hoán vị.

2. Chỉnh hợp

STUDY TIP
Từ định nghĩa ta thấy một hoán vị của tập hợp A có n phần tử là một chỉnh hợp chập n của A.
$$P = A_n^n$$

Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$.
Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Định lý 2

$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ với A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1 \leq k \leq n)$.

Chứng minh

Việc thiết lập một chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử là một công việc gồm k công đoạn.
Công đoạn 1: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất có n cách thực hiện.
Công đoạn 2: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai có $n-1$ cách thực hiện.
…
Sau khi thực hiện xong $i-1$ công đoạn (chọn $i-1$ phần tử của A vào các vị trí thứ 1, 2,…, $i-1$), công đoạn thứ i tiếp theo là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i có $n-i+1$ cách thực hiện.
Công đoạn cuối, công đoạn k có $n-k+1$ cách thực hiện.
Theo quy tắc nhân thì có $n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử.

Chỉnh hợp lặp

Cho tập A gồm n phần tử. Một dãy gồm k phần tử của A, trong đó mỗi phần tử có thể được lặp lại nhiều lần, được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của tập A.
Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử $\overline{A_n^k} = n^k$.

STUDY TIP

Số k trong định nghĩa cần thỏa mãn điều kiện $1 \le k \le n$. Tuy vậy, tập hợp không có phần tử nào là tập rỗng nên ta quy ước gọi tổ hợp chập 0 của n phần tử là tập rỗng.

QUY ƯỚC

$0! = 1$

$C_n^0 = A_n^0 = 1.$

3. Tổ hợp

Giả sử tập A có n phần tử $(n \ge 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

Số các tổ hợp chập k của tập hợp có n phần tử có kí hiệu là C_n^k.

Định lý 3

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Chứng minh

Ta có mỗi hoán vị của một tổ hợp chập k của A cho ta một chỉnh hợp chập k của A. Vậy

$$A_n^k = k!C_n^k \Leftrightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Định lý 4 (hai tính chất cơ bản của số C_n^k)

a. Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \le k \le n$. *Khi đó*

$C_n^k = C_n^{n-k}$.

b. Hằng đẳng thức Pascal

Cho số nguyên dương n và số nguyên dương k với $1 \le k \le n$. *Khi đó*

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Tổ hợp lặp

Cho tập $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ *và số tự nhiên k bất kì. Một tổ hợp lặp chập k của n phần tử là một hợp gồm k phần tử, trong đó mỗi phần tử là một trong n phần tử của A.*

Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$.

4. Phân biệt chỉnh hợp và tổ hợp.

Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ với nhau bởi công thức $A_n^k = k!C_n^k$.

Chỉnh hợp có xét thứ tự.

Tổ hợp không xét thứ tự.

Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử $k \le n$

- Không thứ tự, không hoàn lại C_n^k.

- Có thứ tự, có hoàn lại $\overline{A_n^k}$.

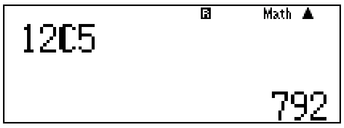
- Có thứ tự, không hoàn lại A_n^k.

Đọc thêm

Trên máy tính cầm tay có chức năng tính tổ hợp, chỉnh hợp như sau:

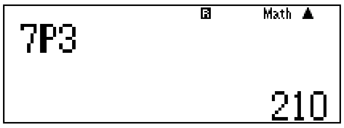
Với tổ hợp ta nhấn tổ hợp phím SHIFT ÷ (**nCr**)

Ví dụ ta muốn tính C_{12}^5 ta ấn 1 2 SHIFT ÷ (**nCr**) 5 =



Với chỉnh hợp ta nhấn tổ hợp phím SHIFT × (**nPr**)

Ví dụ ta muốn tính A_7^3 ta nhấn tổ hợp phím 7 SHIFT × (**nPr**) 3 =



B. Các dạng toán điển hình

Một số lưu ý cần sử dụng khi giải bài toán đếm:

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện một công việc A bằng quy tắc cộng, ta thực hiện các bước:

> ***Bước 1:*** *Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để thực hiện công việc A (có nghĩa công việc A có thể hoàn thành bằng một trong các phương án $A_1; A_2; ...; A_n$).*
>
> ***Bước 2:*** *Đếm số cách chọn $x_1; x_2; ...; x_n$ trong các phương án $A_1; A_2; ...; A_n$.*
>
> ***Bước 3:*** *Dùng quy tắc cộng ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$.*

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện công việc A bằng quy tắc nhân, ta thực hiện các bước:

> ***Bước 1:*** *Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện công việc A (giả sử A chỉ hoàn thành sau khi tất cả các công đoạn $A_1; A_2; ...; A_n$ hoàn thành).*
>
> ***Bước 2:*** *Đếm số cách chọn $x_1; x_2; ...; x_n$ trong các công đoạn $A_1; A_2; ...; A_n$.*
>
> ***Bước 3:*** *Dùng quy tắc nhân ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1.x_2.x_3...x_n$*

Dạng 1 — Bài toán đếm liên quan đến thực tế

Ví dụ 1: Một lớp học có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn ra:

a. một học sinh đi dự trại hè của trường.

b. một học sinh nam và một học sinh nữ dự trại hè của trường.

Số cách chọn trong mỗi trường hợp a và b lần lượt là

A. 45 và 500 **B.** 500 và 45 **C.** 25 và 500 **D.** 500 và 25

Lời giải

a. **Bước 1:** Với bài toán a thì ta thấy cô giáo có thể có hai phương án để chọn học sinh đi thi:

Bước 2: Đếm số cách chọn.

* ***Phương án 1:*** chọn 1 học sinh nam đi dự trại hè của trường thì có 25 cách chọn.

* ***Phương án 2:*** chọn học sinh nữ đi dự trại hè của trường thì có 20 cách chọn.

Bước 3: Áp dụng quy tắc cộng.

Vậy có $20 + 25 = 45$ cách chọn.

b. **Bước 1:** Với bài toán b thì ta thấy công việc là chọn một học sinh nam và một học sinh nữ. Do vậy ta có 2 công đoạn.

Bước 2: Đếm số cách chọn trong các công đoạn.

* ***Công đoạn 1:*** Chọn 1 học sinh nam trong số 25 học sinh nam thì có 25 cách chọn.

* ***Công đoạn 2:*** Chọn 1 học sinh nữ trong số 20 học sinh nữ thì có 20 cách chọn.

Bước 3: Áp dụng quy tắc nhân.

Vậy ta có $25.20 = 500$ cách chọn.

Đáp án A.

STUDY TIP

Bài toán ở ví dụ 1 giúp ta củng cố và định hình các bước để giải quyết bài toán đếm sử dụng quy tắc cộng; quy tắc nhân.

Chú ý:

* Quy tắc cộng: Áp dụng khi công việc có nhiều phương án giải quyết.

* Quy tắc nhân: Áp dụng khi công việc có nhiều công đoạn.

Ví dụ 2: Trên giá sách có 10 quyển sách Văn Lovebook khác nhau, 8 quyển sách Toán Lovebook khác nhau và 6 quyển sách Tiếng Anh Lovebook khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai quyển sách khác môn nhau?

A. 80 **B.** 60 **C.** 48 **D.** 188

Lời giải

Theo quy tắc nhân ta có:

$10.8=80$ cách chọn một quyển Văn Lovebook và một quyển toán Lovebook khác nhau.

$10.6=60$ cách chọn một quyển sách Văn Lovebook và 1 quyển sách Tiếng Anh Lovebook khác nhau.

$8.6=48$ cách chọn 1 quyển sách Toán Lovebook và 1 quyển sách Tiếng Anh Lovebook khác nhau.

Theo quy tắc cộng ta có số cách chọn 2 quyển sách khác môn là

$$80+60+48=188 \text{ cách.}$$

Đáp án D.

STUDY TIP
Ta thấy bài toán ở ví dụ 2 là sự kết hợp của cả quy tắc cộng và quy tắc nhân khi bài toán vừa cần chia trường hợp vừa cần lựa chọn theo bước.

Ví dụ 3: Biển đăng kí xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ I và O). Chữ số đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất có thể là bao nhiêu?

A. 5184.10^5 **B.** 576.10^6 **C.** 33384960 **D.** 4968.10^5

Lời giải

Theo quy tắc nhân ta thực hiện từng bước.

Chữ cái đầu tiên có 24 cách chọn.

Chữ cái tiếp theo cũng có 24 cách chọn.

Chữ số đầu tiên có 9 cách chọn.

Chữ số thứ hai có 10 cách chọn.

Chữ số thứ ba có 10 cách chọn.

Chữ số thứ tư có 10 cách chọn.

Chữ số thứ năm có 10 cách chọn.

Chữ số thứ sáu có 10 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $24.24.9.10^5=5184.10^5$ là số ô tô nhiều nhất có thể đăng kí.

Đáp án A.

STUDY TIP
Cách để phân biệt bài toán sử dụng quy tắc cộng hay quy tắc nhân là phân biệt xem công việc cần làm có thể chia trường hợp hay phải làm theo từng bước.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu cách xếp 7 bạn học sinh A, B, C, D, E, F, G vào một hàng ghế dài gồm 7 ghế sao cho hai bạn B và F ngồi ở hai đầu ghế?

A. 720 cách **B.** 5040 cách **C.** 240 cách **D.** 120 cách

Phân tích

Ta thấy ở đây bài toán xuất hiện hai đối tượng.

Đối tượng 1: Hai bạn B và F (hai đối tượng này có tính chất riêng)

Đối tượng 2: Các bạn còn lại có thể thay đổi vị trí cho nhau.

Bước 1: Ta sẽ sử dụng tính chất riêng của hai bạn B và F trước. Hai bạn này chỉ ngồi đầu và ngồi cuối, hoán đổi cho nhau nên có $2!$ cách xếp.

Bước 2: Xếp vị trí cho các bạn còn lại, ta có $5!$ cách xếp.

Vậy ta có $2!.5!=240$ cách xếp.

Đáp án C.

STUDY TIP
Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng hoán vị của n phần tử, ta dựa trên dấu hiệu
a. Tất cả n phần tử đều có mặt.
b. Mỗi phần tử chỉ xuất hiện 1 lần.
c. Có sự phân biệt thứ tự giữa các phần tử.
d. Số cách xếp n phần tử là số hoán vị của n phần tử đó $P_n=n!$.

Ví dụ 5: Một nhóm 9 người gồm ba đàn ông, bốn phụ nữ và hai đứa trẻ đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên một hàng ghế sao cho mỗi đứa trẻ ngồi giữa hai người phụ nữ và không có hai người đàn ông nào ngồi cạnh nhau?

A. 288 **B.** 864 **C.** 24 **D.** 576

Lời giải

STUDY TIP
Với các bài toán gồm có ít phần tử và vừa cần chia trường hợp vừa thực hiện theo bước thì ta cần chia rõ trường hợp trước, lần lượt thực hiện từng trường hợp (sử dụng quy tắc nhân từng bước) sau đó mới áp dụng quy tắc cộng để cộng số cách trong các trường hợp với nhau.

Kí hiệu T là ghế đàn ông ngồi, N là ghế cho phụ nữ ngồi, C là ghế cho trẻ con ngồi. Ta có các phương án sau:

PA1: *TNCNTNCNT*

PA2: *TNTNCNCNT*

PA3: *TNCNCNTNT*

Xét phương án 1: Ba vị trí ghế cho đàn ông có $3!$ cách.

Bốn vị trí ghế cho phụ nữ có thể có $4!$ cách.

Hai vị trí ghế trẻ con ngồi có thể có $2!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có $3!.4!.2!=288$ cách.

Lập luận tương tự cho phương án 2 và phương án 3.

Theo quy tắc cộng thì ta có $288+288+288=864$ cách.

Đáp án B.

STUDY TIP
Trong trường hợp có quá nhiều trường hợp xảy ra ta khó có thể liệt kê hết thì ta đi đếm phần bù của bài toán:
Đếm số phương án thực hiện hành động A thỏa mãn tính chất B.
1. Đếm số phương án thực hiện hành động A (không cần quan tâm đến có thỏa mãn tính chất B hay không) ta được m phương án.
2. Đếm số phương án thực hiện hành động A không thỏa mãn tính chất B ta được n phương án.
Khi đó số phương án thỏa mãn là $m-n$ cách.

Ví dụ 6: Trong rạp chiếu phim có 15 lỗ thông khí riêng biệt. Để giữ không khí trong lành, thì phải có ít nhất một trong số các lỗ thông khí được bật xuyên suốt 24 giờ. Có bao nhiêu cách bật tắt các lỗ thông khí để luôn giữ được không khí trong lành?

A. 16385. **B.** 16384. **C.** 32767. **D.** 32768.

Lời giải

Ta đánh dấu các lỗ thông hơi lần lượt là $a_1;a_2;...;a_{15}$. Mỗi lỗ thông hơi sẽ có hai trạng thái là bật và tắt. Theo quy tắc nhân, có tất cả 2^{15} trường hợp xảy ra.

Theo đề bài phải có ít nhất một trong số các lỗ thông khí được bật xuyên suốt, vậy chỉ có trường hợp tất cả các điều hòa đều tắt thì không thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy có tất cả $2^{15}-1=32767$ cách bật tắt các lỗ thông khí để luôn giữ được không khí trong lành.

Đáp án C.

Ví dụ 7: Một chồng sách gồm có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật lý, 5 quyển sách Hóa học. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các quyển sách trên thành một hàng ngang trên giá sách sao cho 4 quyển sách Toán đứng cạnh nhau, 3 quyển Vật lý đứng cạnh nhau?

A. 1 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 725760 cách. **D.** 144 cách.

Lời giải

STUDY TIP
Với các dạng bài tập yêu cầu xếp hai hoặc nhiều phần tử đứng cạnh nhau thì ta sẽ "buộc" các phần tử này thành một nhóm và coi như 1 phần tử.

Bước 1: Do đề bài cho 4 quyển sách Toán đứng cạnh nhau nên ta sẽ coi như "buộc" các quyển sách Toán lại với nhau thì số cách xếp cho "buộc" Toán này là $4!$ cách.

Bước 2: Tương tự ta cũng "buộc" 3 quyển sách Lý lại với nhau, thì số cách xếp cho "buộc" Lý này là $3!$cách.

Bước 3: Lúc này ta sẽ đi xếp vị trí cho 7 phần tử trong đó có:

+ 1 "buộc" Toán.

+ 1 "buộc" Lý.

+ 5 quyển Hóa.

Thì sẽ có $7!$ cách xếp.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $7!.4!.3!=725760$ cách xếp.

Đáp án C.

Ví dụ 8: Một câu lạc bộ Phụ nữ của phường Khương Mai có 39 hội viên. Phường Khương Mai có tổ chức một hội thảo cần chọn ra 9 người xếp vào 9 vị trí lễ tân khác nhau ở cổng chào, 12 người vào 12 vị trí khác nhau ở ghế khách mời. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các hội viên để đi tham gia các vị trí trong hội thảo theo đúng quy định?

A. $A_{39}^{9}.A_{39}^{12}$ **B.** $C_{39}^{9}.C_{30}^{12}$ **C.** $C_{39}^{9}.C_{39}^{12}$ **D.** $A_{39}^{9}.A_{30}^{12}$

Phân tích

Bài toán sử dụng quy tắc nhân khi ta phải thực hiện hai bước:

Bước 1: Chọn 9 người vào vị trí lễ tân.

Bước 2: Chọn 12 người vào vị trí khách mời.

Dấu hiệu nhận biết sử dụng chỉnh hợp ở phần **STUDY TIP** bên cạnh.

STUDY TIP

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng chỉnh hợp chập k của n phần tử, ta cần có các dấu hiệu

a. Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.

b. Có sự phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

c. Số cách chọn k phần tử có phân biệt thứ tự từ n phần tử là A_n^k cách.

Lời giải

Bước 1: Chọn người vào vị trí lễ tân.

Do ở đây được sắp thứ tự nên ta sẽ sử dụng chỉnh hợp. Số cách chọn ra 9 người xếp vào vị trí lễ tân là A_{39}^{9} cách.

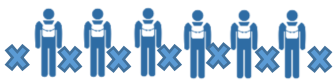
Bước 2: Chọn người vào vị trí khách mời. Số cách chọn là 12 thành viên trong số các thành viên còn lại để xếp vào ghế khách mời là A_{30}^{12} cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì số cách chọn các hội viên để đi dự hội thảo theo đúng quy định là $A_{39}^{9}.A_{30}^{12}$ cách.

Đáp án D.

Ví dụ 9: Có 6 học sinh và 2 thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai thầy giáo không đứng cạnh nhau?

A. 30240 cách **B.** 720 cách **C.** 362880 cách **D.** 1440 cách.



STUDY TIP

Khi bài toán yêu cầu xếp hai hoặc nhiều phần tử không đứng cạnh nhau. Chúng ta có thể tạo ra các "vách ngăn" các phần tử này trước khi xếp chúng.

Lời giải

Cách 1: Trước hết, xếp 6 học sinh thành một hàng có $6!$ cách.

Lúc này giữa hai học sinh bất kì sẽ tạo nên một vách ngăn và 6 học sinh sẽ tạo nên 7 vị trí có thể xếp các thầy vào đó tính cả hai vị trí ở hai đầu hàng (hình minh họa bên). 7 vị trí dấu nhân chính là 7 vách ngăn được tạo ra.

+ Do đề yêu cầu 2 thầy giáo không đứng cạnh nhau nên ta xếp 2 thầy giáo vào 2 trong 7 vị trí vách ngăn được tạo ra có A_7^2 cách.

Theo quy tắc nhân ta có tất cả $6!.A_7^2 = 30240$ cách xếp.

Cách 2: - Có $8!$ cách xếp 8 người.

- Buộc hai giáo viên lại với nhau thì có $2!$ cách buộc.

Khi đó có $2.7!$ cách xếp. Mà hai giáo viên không đứng cạnh nhau nên số cách xếp là $8! - 2.7! = 30240$ cách xếp.

Đáp án A.

Ví dụ 10: Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn một bó hồng gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ?

A. 10 cách. **B.** 20 cách. **C.** 120 cách. **D.** 150 cách.

Phân tích

Ta thấy do chỉ chọn 7 bông hồng mà có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ nên chỉ có ba trường hợp sau:

TH1: Chọn được 3 bông hồng vàng và 4 bông hồng đỏ.

TH2: Chọn được 4 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ.

TH3: Chọn được 3 bông hồng vàng, 3 bông hồng đỏ và 1 bông hồng trắng.

Lời giải

STUDY TIP

Để nhận dạng bài toán sử dụng tổ hợp chập k của n phần tử, ta dựa trên dấu hiệu:

a. Phải chọn ra k phần tử từ n phần tử cho trước.

b. Không phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

c. Số cách chọn k phần tử không phân biệt thứ tự từ n phần tử đã cho là C_n^k cách.

TH1: Số cách chọn 3 bông hồng vàng là C_5^3 cách.

Số cách chọn 4 bông hồng đỏ là C_4^4 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $C_5^3.C_4^4 = 10$ cách

TH2: Tương tự TH1 thì ta có $C_5^4.C_4^3 = 20$ cách.

TH3: Tương tự thì có $C_5^3.C_4^3.C_3^1 = 120$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng thì có $10 + 20 + 120 = 150$ cách.

Đáp án D.

Từ các bài toán trên ta rút ra được quy luật phân biệt tổ hợp và chỉnh hợp như sau:

* Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ với nhau bởi công thức:

$$A_n^k = k!.C_n^k$$

* Chỉnh hợp: có thứ tự Tổ hợp: không có thứ tự.

* Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử thì sử dụng chỉnh hợp. Ngược lại thì sử dụng tổ hợp.

* Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử ($k \le n$):

+ Không thứ tự: C_n^k

+ Có thứ tự: A_n^k

Ví dụ 11: Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

A. 120 **B.** 90 **C.** 270 **D.** 255

Lời giải

Số cách chọn ra 4 học sinh bất kì từ 12 học sinh là $C_{12}^4 = 495$ cách.

Số cách chọn ra 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

***TH1:** Lớp A có hai học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh:

Chọn 2 học sinh trong 5 học sinh lớp A có C_5^2 cách.

Chọn 1 học sinh trong 4 học sinh lớp B có C_4^1 cách.

Chọn 1 học sinh trong 3 học sinh lớp C có C_3^1 cách.

Suy ra số cách chọn là $C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120$ cách.

* **TH2:** Lớp B có 2 học sinh, các lớp A, C mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$ cách.

* **TH3:** Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60$ cách.

Vậy số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là

$$120 + 90 + 60 = 270 \text{ cách.}$$

Số cách chọn ra 4 học sinh thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên là

$$495 - 270 = 225 \text{ cách.}$$

Đáp án D.

STUDY TIP

Trong nhiều bài toán, làm trực tiếp sẽ khó trong việc xác định các trường hợp hoặc các bước thì ta nên làm theo hướng gián tiếp như bài toán ở ví dụ 6.

Ta sử dụng cách làm gián tiếp khi bài toán giải bằng cách trực tiếp gặp khó khăn do xảy ra quá nhiều trường hợp, chúng ta tìm cách gián tiếp bằng cách xét bài toán đối.

Ví dụ 12: Cho 8 bạn học sinh A, B, C, D, E, F, G, H. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 8 bạn đó ngồi xung quanh 1 bàn tròn có 8 ghế?

A. 40320 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 720 cách. **D.** 40319 cách.

ĐỌC THÊM

Hoán vị vòng quanh: Cho tập A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử.
Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là

$$Q_n = (n-1)!$$

STUDY TIP

Trong bài toán, do các chỗ ngồi đã được sắp thứ tự nên khi xếp A vào bàn có 6 cách xếp. Nếu không đánh số thứ tự vào từng thì xếp A vào bàn chỉ có 1 cách xếp do bàn tròn thì tất cả các ghế đều như nhau.

STUDY TIP

Ở đây có nhiều độc giả không xét đến công đoạn sau khi chọn sách còn công đoạn tặng sách nữa. Do các bạn A, B, C, D, E là khác nhau nên mỗi cách tặng sách các môn cho các bạn là khác nhau, nên ta phải xét thêm công đoạn đó.

Lời giải

Ta thấy ở đây xếp các vị trí theo hình tròn nên ta phải cố định vị trí một bạn.
Ta chọn cố định vị trí của A, sau đó xếp vị trí cho 7 bạn còn lại có $7!$ cách.
Vậy có $7! = 5040$ cách.

Đáp án B.

Ví dụ 13: Có bao nhiêu cách xếp 6 người vào một cái bàn tròn có 6 chỗ ngồi đã được đánh số thứ tự, sao cho A và B ngồi cạnh nhau?

A. 120. **B.** 720. **C.** 288. **D.** 48.

Lời giải

Xếp bạn A vào bàn trước ta có 6 cách xếp.
Xếp B cạnh A có 2 cách.
Xếp bốn người còn lại vào 4 chỗ ta có $4!$ cách.
Vậy có $6.2.4! = 288$ cách xếp.

Đáp án C.

Ví dụ 14: Một thầy giáo có 10 cuốn sách khác nhau trong đó có 4 cuốn sách Toán, 3 cuốn sách Lí và 3 cuốn sách Hóa. Thầy muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 em học sinh A, B, C, D, E mỗi em một cuốn. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng cho các em học sinh sao cho sau khi tặng sách xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn ít nhất một cuốn.

A. 204 **B.** 24480 **C.** 720 **D.** 2520

Lời giải

Ta thấy với bài toán này nếu làm trực tiếp thì sẽ khá khó, nên ta sẽ làm theo cách gián tiếp. Tìm bài toán đối đó là tìm số cách sao cho sau khi tặng sách xong có 1 môn hết sách.

TH1: Môn Toán hết sách:

Số cách chọn 4 cuốn sách Toán là 1 cách.
Số cách chọn 1 cuốn trong số 6 cuốn còn lại là 6 cách.
Vậy có 6 cách chọn sách.
Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$ cách.

Vậy có $6.120 = 720$ cách

TH2: Môn Lí hết sách:

Số cách chọn 3 cuốn sách Lí là 1 cách.
Số cách chọn 2 cuốn trong số 7 cuốn còn lại là C_7^2 cách.
Vậy có 21 cách chọn.
Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$

Vậy có $21.120 = 2520$ cách chọn sách.

TH3: Môn Hóa hết sách: Tương tự trường hợp 2 thì có 2520 cách.

Số cách chọn 5 quyển bất kì trong số 10 quyển sách đó và tặng cho 5 em học sinh là $C_{10}^5.A_5^5 = 252.A_5^5 = 30240$ cách.

Vậy số cách chọn sao cho sau khi tặng sách xong, mỗi loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn là $30240 - 720 - 2520 - 2520 = 24480$ cách.

Đáp án B.

Ví dụ 15: Cho ba toa tàu đánh số từ 1 đến 3 và 12 hành khách. Mỗi toa đều chứa được tối đa 12 hành khách. Gọi n là số cách xếp các hành khách vào các toa tàu thỏa mãn điều kiện "mọi toa đều có khách". Tìm số các chữ số của n.

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

* Xếp 12 khách vào 3 toa tàu (có thể có toa không có khách): Có 3^{12} cách.

* Trừ đi các trường hợp có KHÔNG QUÁ 2 toa có khách: $-C_3^2.2^{12}$.

(Chọn ra hai toa tàu có C_3^2 cách. Sau đó xếp tùy ý 12 khách vào 2 toa đã chọn ra này, tức là có thể có một trong hai toa này không có khách).

Nhưng như vậy ta đã trừ đi các trường hợp chỉ có một toa có khách đến hai lần nên phải cộng lại số này: $+C_3^1.1^{12}$.

* Vậy số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là $3^{12}-C_3^2.2^{12}+C_3^1.1^{12}=519156$ cách.

Đáp án B.

STUDY TIP

Số cách xếp q hành khách vào n toa tàu khác nhau sao cho toa tàu nào cũng có khách (hay chính là bài toán chia quà: Có bao nhiêu cách chia q món quà ***khác nhau*** cho n bạn sao cho bạn nào cũng có quà?) là

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^q$$

Bài toán tổng quát: Có bao nhiêu cách xếp q hành khách vào n toa tàu khác nhau sao cho toa tàu nào cũng có khách? (hay chính là bài toán chia quà: Có bao nhiêu cách chia q món quà ***khác nhau*** cho n bạn sao cho bạn nào cũng có quà?).

Ở bài toán trên, ta có:

$$3^{12}-C_3^2.2^{12}+C_3^1.1^{12}=C_3^0(3-0)^{12}-C_3^1(3-1)^{12}+C_3^2(3-2)^{12}-C_3^3(3-3)^{12}.$$

Lập luận tương tự như bài toán trên ta có số cách xếp (cách chia) là:

$$C_n^0(n-0)^q-C_n^1(n-1)^q+C_n^2(n-2)^q-C_n^3(n-3)^q+...=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(n-k)^q.$$

Dạng 2

Bài toán đếm liên quan đến đếm số các loại số

Kiến thức cơ bản

Dấu hiệu chia hết

Cho số tự nhiên $x=\overline{a_1a_2...a_n}$

1. *x chia hết cho 2* $\Leftrightarrow$ a_n *là số chẵn.*

2. *x chia hết cho 3* $\Leftrightarrow$ $a_1+a_2+...+a_n$ *chia hết cho 3.*

3. *x chia hết cho 4* $\Leftrightarrow \overline{a_{n-1}a_n}$ *chia hết cho 4.*

4. *x chia hết cho 5* $\Leftrightarrow a_n \in \{0;5\}$.

5. *x chia hết cho 6* $\Leftrightarrow$ *x là số chẵn và chia hết cho 3.*

6. *x chia hết cho 8* $\Leftrightarrow \overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ *chia hết cho 8.*

7. *x chia hết cho 9* $\Leftrightarrow a_1+a_2+...+a_n$ *chia hết cho 9.*

8. *x chia hết cho 11* $\Leftrightarrow$ *tổng các chữ số ở hàng chẵn trừ đi tổng các chữ số hàng lẻ chia hết cho 11 (hoặc ngược lại tổng các chữ số hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số hàng chẵn chia hết cho 11).*

9. *x chia hết cho 12* $\Leftrightarrow$ *x vừa chia hết cho 3, vừa chia hết cho 4.*

10. *x chia hết cho 15* $\Leftrightarrow$ *x vừa chia hết cho 3, vừa chia hết cho 5.*

11. *x chia hết cho 18* $\Leftrightarrow$ *x vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 9.*

12. *x chia hết cho 25* $\Leftrightarrow$ *hai chữ số tận cùng là* 00;25;50;75.

Chú ý

Khi làm giải toán tổ hợp cần chú ý:

1. Phân biệt yêu cầu đề bài: có thứ tự - không có thứ tự, phân biệt – không phân biệt, chữ số 0 có mặt – chữ số 0 không có mặt.

2. Liệt kê các trường hợp có thể xảy ra.

3. Ghi hình thức của các số thỏa mãn yêu cầu đề bài để tiện cho ta xem sự khác nhau. Như trong ví dụ 21, ta đặt hình thức $\overline{1bc},\overline{a1c},\overline{ab1}$. Ta phải chia cho số lặp đều, để có kết quả chính xác.

4. Số lớn hơn, số bé hơn: xem xét các trường hợp từ trái qua phải, tức là xét giảm dần 10^k (hàng ngàn, hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị).

5. Dấu hiệu chia hết (lý thuyết bên).

Ví dụ 16: Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số và chia hết cho 5.

A. 660. **B.** 3773. **C.** 6779. **D.** 523.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$.

Do số cần tìm chia hết cho 5 nên $e\in\{0;5\}$.

STUDY TIP

Do bài toán chỉ hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên mà không yêu cầu các chữ số khác nhau từng đôi một nên chọn b, c, d đều có 7 cách chọn.

Với $e=0$:	Với $e=5$:
Chọn a có 6 cách chọn.	Chọn a có 5 cách chọn.
Chọn b có 7 cách chọn.	Chọn b có 7 cách chọn.
Chọn c có 7 cách chọn.	Chọn c có 7 cách chọn.
Chọn d có 7 cách chọn.	Chọn d có 7 cách chọn
Chọn e có 1 cách chọn.	Chọn e có 1 cách chọn.
$\Rightarrow$ có $6.7.7.7.1=2058$ số.	$\Rightarrow$ có $5.7.7.7.1=1715$ số.

Vậy có tất cả $2058+1715=3773$ số.

Đáp án B.

Ví dụ 17: Ba bạn An, Ngọc, Lan mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;20]$. Số cách để bốn số viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. 2304. **B.** 834. **C.** 1196. **D.** 2666.

Lời giải

STUDY TIP

1. Nhiều độc giả sẽ chọn A hoặc B vì giải bài toán khi nghĩ rằng ba bạn phải viết ba số khác nhau.
2. Ở trường hợp 4, ta nhân thêm với $3!$ là cách sắp các bạn cho từng bộ số. Ví dụ với một bộ số $(a;b;c)$ thì ta có $3!$ cách sắp.

Lấy một số tự nhiên từ 1 đến 20 ta có các nhóm số sau

Nhóm 1: Chia hết cho 3 gồm các số thuộc tập $\{3;6;9;12;15;18\}$.

Nhóm 2: Chia cho 3 dư 1 gồm các số thuộc tập $\{1;4;7;10;13;16;19\}$.

Nhóm 3: Chia cho 3 dư 2 gồm các số thuộc tập $\{2;5;8;11;14;17;20\}$.

Ba bạn mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;20]$ thỏa mãn ba số đó có tổng chia hết cho 3 thì có các trường hợp sau xảy ra

Trường hợp 1: Ba số đều chia hết cho 3 thì có $6^3=216$ cách.

Trường hợp 2: Ba số đều chia cho 3 dư 1 thì có $7^3=343$ cách.

Trường hợp 3: Ba số đều chia cho 3 dư 2 có $7^3=343$ cách.

Trường hợp 4: Một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, một số chia cho 3 dư 2 thì có $6.7.7.3!=1764$ cách.

Vậy có tất cả $216+343+343+1764=2666$ cách.

Đáp án D.

Ví dụ 18: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?

A. 6720 số **B.** 40320 số **C.** 5880 số **D.** 840 số

Lời giải

STUDY TIP

Ví dụ 18 là một dấu hiệu của hoán vị lặp.

ĐỌC THÊM

Cho k phần tử khác nhau $a_1,a_2,...,a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử a_2,..., n_k phần tử a_k $(n_1+n_2+...+n_k=n)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là hoán vị lặp cấp n và kiểu $(n_1,n_2,...,n_k)$ của k phần tử. Số các hoán vị lặp dạng như trên là

$$P_n(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}.$$

Giả sử các số tự nhiên gồm 8 chữ số tương ứng với 8 ô.

Do chữ số 1 có mặt 3 lần nên ta sẽ coi như tìm số các số thỏa mãn đề bài được tạo nên từ 8 số 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5.

Số hoán vị của 8 số 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5 trong 8 ô trên là $8!$

Mặt khác chữ số 1 lặp lại 3 lần nên số cách xếp là $\frac{8!}{3!}$ kể cả trường hợp số 0 đứng đầu.

Xét trường hợp ô thứ nhất là chữ số 0, thì số cách xếp là $\frac{7!}{3!}$

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\frac{8!}{3!}-\frac{7!}{3!}=5880$ số.

Đáp án C.

Ví dụ 19: Cho tập $A=\{1;2;3;4;5;6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm có sáu chữ số đôi một khác nhau sao cho tổng của ba chữ số đầu nhỏ hơn tổng ba chữ số sau một đơn vị?

A. 36. **B.** 27. **C.** 18. **D.** 108.

Lời giải

Gọi số có sáu chữ số khác nhau đôi một là $n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

Theo đề bài ta có $a_1+a_2+a_3+1=a_4+a_5+a_6$

Mà $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=21$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3=10$.

Ta có các bộ số thỏa mãn có tổng bằng 10 như sau $(1;3;6),(2;3;5),(1;4;5)$.

Với mỗi bộ số sẽ có $3!$ cách sắp xếp $a_1;a_2;a_3$ và có $3!$ cách xếp $a_4;a_5;a_6$.

Vậy có tất cả $3.3!.3!=108$ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án D.

Ví dụ 20: Cho tập $A=\{1;2;3\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số sao cho các chữ số giống nhau thì không đứng cạnh nhau?

A. 30. **B.** 90. **C.** 60. **D.** 96.

Lời giải

- Chọn chữ số hàng trăm nghìn có 3 cách.
- Mỗi chữ số tiếp theo phải khác số liền trước, do vậy mỗi chữ số tiếp theo có 2 cách chọn.

Vậy có $3.2^5=96$ số.

Đáp án D.

Ví dụ 21: Có bao nhiêu ước nguyên dương của tích 2000.2001?

A. 60. **B.** 120. **C.** 160. **D.** 12.

Lời giải

Ta có $2000.2001=2^4.3.5^3.23.29$

Ước nguyên dương cuả tích 2000.2001 có dạng $2^x.3^y.5^z.23^t.29^m$ với x, y, z, t, m là các số nguyên không âm thỏa mãn $0\le x\le 4;0\le y,t,m\le 1;0\le z\le 3$.

Chọn x có 5 cách chọn.

Chọn y có 2 cách chọn.

Chọn z có 4 cách chọn.

Chọn t có 2 cách chọn.

Chọn m có 2 cách chọn.

Theo quy tắc nhân thì có $5.2.4.2.2=160$ ước nguyên dương.

Đáp án C.

STUDY TIP

Tổng quát: Số nguyên dương $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ (với $p_1;p_2;...;p_k$ là k số nguyên tố phân biệt) có $(a_1+1)(a_2+1)...(a_k+1)$ ước nguyên dương.

Ví dụ 22: Xác định số cặp số nguyên dương (a,b) sao cho bội chung nhỏ nhất của a và b là $2^3.5^7.11^{13}$.

A. 2835. **B.** 448. **C.** 480. **D.** 2730.

Lời giải

Do cả a và b đều là ước của $2^35^711^{13}$ nên $a=2^x5^y11^z$ và $b=2^s5^t11^u$ với $z;y;z;s;t;u$ là các số nguyên không âm.

Do $2^35^711^{13}$ là bội chung nhỏ nhất của a và b nên $\max\{x,s\}=3;\max\{y,t\}=7$ và $\max\{z,u\}=13$.

Từ đây suy ra $(x;s)\in\{(0;3),(1;3),(2;3),(3;3),(3;2),(3;1),(3;0)\}$

Suy ra có 7 cách chọn $(x;s)$.

Tương tự có 15 cách chọn $(y;t)$ và 27 cách chọn $(z;u)$.

STUDY TIP

Tổng quát: Cho số nguyên dương $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ (với $p_1;p_2;...;p_k$ là k số nguyên tố phân biệt).

Có $(2a_1+1)(2a_2+1)...(2a_k+1)$ cặp số nguyên dương $(a;b)$ sao cho bội chung nhỏ nhất của a và b là n.

Theo quy tắc nhân thì có $7.15.27 = 2835$ cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án A.

Ví dụ 23: Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000 thỏa mãn số đó có chứa ít nhất một chữ số 1.

A. 254 **B.** 252 **C.** 272 **D.** 271

Lời giải

1. Giải bài toán theo quy tắc cộng (trực tiếp).

Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên nhỏ hơn 1000 $\Rightarrow |S| = 999$.

Gọi $S_1;S_2;S_3$ lần lượt là tập hợp các số tự nhiên có 1 chữ số, 2 chữ số, 3 chữ số.

$\Rightarrow |S_1| = 9; |S_2| = 90; |S_3| = 900$.

$A_1;A_2;A_3$ lần lượt là tập hợp các số tự nhiên có 1 chữ số, 2 chữ số, 3 chữ số thỏa mãn mỗi số đều xuất hiện ít nhất một chữ số 1 $\Rightarrow |A_1| = 1$.

Ta có $|A_2| = \{\overline{1b},\} \cup \{\overline{a1}; a \neq 0\} \setminus \{11\}$ (Do 11 xuất hiện 2 lần khi $a = 1; b = 1$).

$\Rightarrow |A_2| = 10 + 9 - 1 = 18$.

Gọi $A_{\overline{1bc}}$ là tập các số có ba chữ số bắt đầu bằng chữ số 1 $(b;c \neq 1)$. Tương tự ta kí hiệu cho $A_{\overline{a1c}}; (a;c \neq 1; a \neq 0); A_{\overline{ab1}}; (a;b \neq 1; a \neq 0)$.

$\Rightarrow A_3 = \{111\} \cup A_{\overline{1bc}} \cup A_{\overline{a1c}} \cup A_{\overline{ab1}} \cup A_{\overline{11c}} \cup A_{\overline{1b1}} \cup A_{\overline{a11}}$.

$\Rightarrow |A_3| = 1 + 9.9 + 8.9 + 8.9 + 9 + 9 + 8 = 252$.

Vậy có $1 + 18 + 252 = 271$ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2. Giải bài toán đối (gián tiếp).

Thay vì đi lập các số có chứa chữ số 1, ta sẽ đi tìm số các số không chứa số 1.

Ta sẽ lập các số nguyên dương nhỏ hơn 1000 mà không chứa chữ số 1.

Đặt $A = \{0;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Từ tập A ta sẽ lập các số nguyên dương

a. Số có 1 chữ số có 8 số thỏa mãn.

b. Số có 2 chữ số.

Chọn chữ số hàng chục có 8 cách.

Chọn chữ số hàng đơn vị có 9 cách.

$\Rightarrow$ Có $8.9 = 72$ số thỏa mãn.

c. Số có 3 chữ số.

Chọn chữ số hàng trăm có 8 cách.

Chọn chữ số hàng chục có 9 cách.

Chọn chữ số hàng đơn vị có 9 cách.

$\Rightarrow$ Có $8.9.9 = 648$ số.

Vậy số các số nguyên dương nhỏ hơn 1000 mà chứa ít nhất 1 chữ số 1 là $999 - 8 - 72 - 648 = 271$ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án D.

STUDY TIP

Ta thấy rõ ràng bài toán có nhiều trường hợp nên việc giải theo quy tắc cộng phân chia từng trường hợp sẽ mất nhiều thời gian. Chưa kể nếu bài toán thay đổi 1000 thành 10000, 100000,… thì ta không thể làm được theo cách liệt kê trực tiếp, mà buộc ta làm theo cách 2 như bên.

- Dấu hiệu nhận biết làm bài toán theo phần bù này thường là bài toán xuất hiện các cụm từ đáng lưu ý "có ít nhất", "có tối đa một", "có mặt", "không có mặt", "bắt đầu bởi",…

Ví dụ 24: Cho tập hợp $A = \{1,2,3,...,n\}$ trong đó n là số nguyên dương lớn hơn

1. Hỏi có bao nhiêu cặp sắp thứ tự $(x;y)$ thỏa mãn $\begin{cases} x;y \in A \\ x \geq y \end{cases}$?

A. $\dfrac{n(n+1)}{2}$. **B.** $n(n+1)$. **C.** $\dfrac{(n-1)n}{2}$. **D.** $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$.

Lời giải

Với $x=1$ thì có n cách chọn y.

Với $x=2$ thì có $n-1$ cách chọn y.

Với $x=3$ thì có $n-2$ cách chọn y.

…

Với $x=n$ thì có 1 cách chọn y.

Vậy có tất cả $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ cặp số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án A.

Ví dụ 25: Phương trình $x+y+z=1000$ có tất cả bao nhiêu bộ nghiệm $(x;y;z)$ nguyên dương?

A. 165170996. **B.** 165668499. **C.** 497503. **D.** 498501.

Lời giải

Liệt kê 1000 số 1 liên tiếp thì có 999 dấu cộng như sau: $1000=\underbrace{1+1+1+...+1}_{1000\,so\,1}$.

Khi bỏ bất kì 2 dấu cộng, ta sẽ được bộ ba số $(x;y;z)$ là nghiệm của phương trình $x+y+z=1000$.

Chẳng hạn ta bỏ đi dấu cộng thứ hai và dấu cộng thứ sáu thì ta sẽ được bộ nghiệm $x=1;y=1+1+1+1+1;z=\underbrace{1+1+1+....+1}_{904\,so\,1}\Rightarrow(x;y;z)=(1;5;904)$.

Vậy số bộ nghiệm của phương trình $x+y+z=1000$ là $C_{999}^2=498501$.

Đáp án D.

Ví dụ 26: Phương trình $x+y+z+t=400$ có bao nhiêu bộ nghiệm $(x;y;z;t)$ tự nhiên?

A. 10908404. **B.** 10827401. **C.** 10507399. **D.** 10586800.

Lời giải

Đặt $X=x+1;Y=y+1;Z=z+1;T=t+1$ thì $X;Y;Z;T$ là các số nguyên dương.

Phương trình $x+y+z+t=400\Leftrightarrow X+Y+Z+T=404$.

Quay trở về bài toán ở ví dụ 23.

Vậy có tất cả $C_{403}^3=10827401$ bộ nghiệm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án B.

Ví dụ 27: Từ sáu chữ số $2;4;5;7;8;9$ lập được các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Tính tổng tất cả các số đó.

A. 21000. **B.** 233331000. **C.** 46666200. **D.** 1944425.

Lời giải

- Nếu hàng đơn vị của số tạo thành là 2 thì có A_5^4 số.
- Tương tự với chữ số hàng đơn vị lần lượt là $4;5;7;8;9$ thì cũng lần lượt có A_5^4 số.

Do vậy tổng các chữ số hàng đơn vị là $(2+4+5+7+8+9).A_5^4=4200$.

Tương tự các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn và hàng vạn nghìn ta có tổng tất cả các số là $(1+10+100+1000+10000).4200=11111.4200=46666200$.

Đáp án C.

STUDY TIP

Đếm số bộ nghiệm nguyên dương, số bộ nghiệm tự nhiên của phương trình bậc nhất nhiều ẩn $x_1+x_2+...+x_n=m$.

1. Với $1\le n\le m; m,n\in\mathbb{N}$

Ta viết $m=1+1+...+1$ thì có C_{m-1}^{n-1} bộ nghiệm nguyên dương $(x_1;x_2;...;x_n)$. Mỗi bộ nghiệm tương ứng với một cách chọn $n-1$ dấu "+" trong $m-1$ dấu "+".

2. Nếu xét nghiệm là số tự nhiên thì ta đặt $t_i=x_i+1$ thì lại đưa về đếm số bộ nghiệm nguyên dương của t_i. Phương trình có số bộ nghiệm trong tập hợp số tự nhiên là C_{m+n-1}^{n-1}.

3. Nếu có điều kiện $x\ge a$ thì ta đặt $X=x-a$ để đưa về các trường hợp trên.

STUDY TIP

Tổng quát: Với n chữ số $a,b,c,..,l$ phân biệt ($a,b,c,...,l$ là các chữ số từ 1 đến 9 khác nhau) tạo ra các số có k chữ số khác nhau thì tổng các hoán vị là

$(n-1)!.(a+b+c+...+l).\dfrac{10^k-l}{9}$

C. Bài tập rèn luyện kĩ năng

Xem đáp án chi tiết tại trang 157

Câu 1: Trong một lớp có 17 bạn nam và 11 bạn nữ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra hai bạn, trong đó có một bạn nam và một bạn nữ?

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn một bạn làm lớp trưởng?

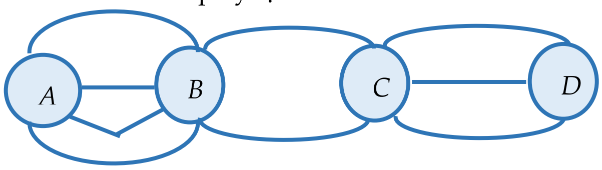
A. a. 187 cách và b. 28 cách.

B. a. 28 cách và b. 187 cách.

C. a. 17 cách và b. 11 cách.

D. a. 11 cách và b. 17 cách.

Câu 2: Các thành phố *A, B, C, D* được nối với nhau bởi các con đường như hình dưới. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ *A* đến *D* rồi quay lại *B*.



A. 576. **B.** 24. **C.** 144. **D.** 432.

Câu 3: Một lớp học có 25 học sinh khá môn Toán, 24 học sinh khá môn Ngữ Văn, 10 học sinh khá cả môn Toán và môn Ngữ Văn và 3 học sinh không khá cả Toán và Ngữ Văn. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu học sinh?

A. 39. **B.** 42. **C.** 62. **D.** 52.

Câu 4: Trong kì thi tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty cổ phần Giáo dục trực tuyến VEDU, ở khối A có 51 thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán, 73 thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật lí, 64 thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa học, 32 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật lý, 45 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Vật lí và Hóa học, 21 thí sinh đạt điểm giỏi cả môn Toán và môn Hóa học và 10 thí sinh đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật lí, Hóa học. Có 767 thí sinh mà cả ba môn đều không có điểm giỏi. Hỏi có bao nhiêu thí sinh tham dự tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty?

A. 867 **B.** 776 **C.** 264 **D.** 767

Câu 5: Người ta phỏng vấn 100 người về ba bộ phim *A, B, C* đang chiếu thì thu được kết quả như sau

Bộ phim *A*: có 28 người đã xem.

Bộ phim *B*: có 26 người đã xem.

Bộ phim *C*: có 14 người đã xem.

Có 8 người đã xem hai bộ phim *A* và *B*.

Có 4 người đã xem hai bộ phim *B* và *C*.

Có 3 người đã xem hai bộ phim *A* và *C*.

Có 2 người đã xem cả ba bộ phim *A; B* và *C*.

Số người không xem bất cứ phim nào trong cả ba bộ phim *A, B, C*.

A. 55 **B.** 45 **C.** 32 **D.** 51

Câu 6: Một đội văn nghệ chuẩn bị được 2 vở kịch, 3 điệu múa và 6 bài hát. Tại hội diễn, mỗi đội chỉ được trình diễn một vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát. Hỏi đội văn nghệ trên có bao nhiêu cách chọn chương trình diễn, biết chất lượng các vở kịch, điệu múa, bài hát là như nhau?

A. 11. **B.** 36. **C.** 25. **D.** 18.

Câu 7: Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đỏ khác nhau và 8 viên bi đen khác nhau xếp thành một dãy sao cho hai viên bi cùng màu không được ở cạnh nhau.

A. 3251404800. **B.** 1625702400.

C. 72. **D.** 36.

Câu 8: Sắp xếp 5 học sinh học lớp *A* và 5 học sinh học lớp *B* vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 5 ghế sao cho 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp. Khi đó số cách xếp là

A. 460000. **B.** 460500. **C.** 460800. **D.** 460900.

Câu 9: Có 20 cặp vợ chồng tham dự chương trình Gameshow truyền hình thực tế. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 cặp đôi sao cho 2 cặp đó là hai đôi vợ chồng?

A. 380 **B.** 116280 **C.** 90 **D.** 5040

Câu 10: Cho tập $A=\{2;5\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số sao cho không có chữ số 2 nào đứng cạnh nhau?

A. 144 số **B.** 143 số **C.** 1024 số **D.** 512 số.

Câu 11 : Có 6 học sinh và 3 thầy giáo *A, B, C*. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 9 người đó ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa 2 học sinh?

A. 43200 **B.** 720 **C.** 60 **D.** 4320

Câu 12: Trong một tổ học sinh có 5 em gái và 10 em trai. Thùy là một trong 5 em gái và Thiện là một trong 10 em trai đó. Thầy chủ nhiệm chọn một nhóm 5 bạn tham gia buổi văn nghệ tới. Hỏi thầy chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn mà trong đó có ít nhất một trong hai em Thùy hoặc Thiện không được chọn.

A. 286 **B.** 3003 **C.** 2717 **D.** 1287

Câu 13: Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 em này trên một hàng ngang sao cho giữa hai em nữ bất kì đều không có một em nam nào?

A. 241920 **B.** 30240 **C.** 5040 **D.** 840

Câu 14: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.

A. 720 số. **B.** 504 số. **C.** 936 số. **D.** 1440 số.

Câu 15: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1;A_2;...;A_{2n}$ gấp 20 lần so với số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1;A_2;...;A_{2n}$. Vậy giá trị của n là

A. $n=10$ **B.** $n=12$ **C.** $n=8$ **D.** $n=14$

Câu 16: Giả sử ta dùng 5 màu để tô màu cho 3 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng hai lần. Số các cách để chọn những màu cần dùng là:

A. $\frac{5!}{2!}$. **B.** 5×3. **C.** $\frac{5!}{3!2!}$. **D.** 5^3.

Câu 17: Ông bà An cùng 6 đứa con đang lên máy bay theo một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp hàng khác nhau nếu ông An và bà An đứng ở đầu hoặc cuối hàng?

A. 720. **B.** 1440. **C.** 20160. **D.** 40320.

Câu 18: Có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu đó có thể lập bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu khác nhau, sao cho mỗi đề phải có 3 loại (khó, trung bình, dễ) và số câu dễ không ít hơn 2?

A. 142506 **B.** 56875 **C.** 10500 **D.** 22750

Câu 19: Giả sử rằng, trong Đại hội thể dục thể thao tỉnh Gia Lai năm 2018 có 16 đội bóng đăng ký tham gia giải, được chia thành 4 bảng A, B, C, D, mỗi bảng gồm 4 đội. Cách thức thi đấu như sau:

Vòng 1: Các đội trong mỗi bảng thi đấu vòng tròn một lượt, tính điểm và chọn ra đội nhất của mỗi bảng.

Vòng 2 (bán kết): Đội nhất bảng A gặp đội nhất bảng C; Đội nhất bảng B gặp đội nhất bảng D.

Vòng 3 (chung kết): Tranh giải ba: Hai đội thua trong bán kết; tranh giải nhất: Hai đội thắng trong bán kết.

Biết rằng tất cả các trận đấu đều diễn ra trên sân vận động Pleiku vào các ngày liên tiếp, mỗi ngày 4 trận. Hỏi Ban tổ chức cần mượn sân vận động trong bao nhiêu ngày?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8

Câu 20: Một bộ ghép hình gồm các miếng gỗ. Mỗi miếng gỗ được đặc trưng bởi 4 tiêu chuẩn: chất liệu, màu sắc, hình dạng và kích cỡ. Biết rằng có hai chất liệu (gỗ, nhựa); có 4 màu (xanh, đỏ, lam, vàng); có 4 hình dạng (hình tròn, vuông, tam giác, lục giác) và 3 kích cỡ (nhỏ, vừa, lớn). Xét miếng gỗ "nhựa, đỏ, hình tròn, vừa". Hỏi có bao nhiêu miếng gỗ khác miếng gỗ trên ở đúng hai tiêu chuẩn?

A. 29 **B.** 39 **C.** 48 **D.** 56

Câu 21: Có 5 bi đỏ và 5 bi trắng có kích thước đôi một khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các bi này thành 1 hàng dài sao cho hai bi cùng màu không được nằm kề nhau?

A. 28800 **B.** 86400 **C.** 43200 **D.** 720

Câu 22: Cho $X=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ có thể lập bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một từ X sao cho một trong 3 chữ số đầu tiên phải có mặt chữ số 1.

A. 2280 **B.** 840 **C.** 1440 **D.** 2520

Câu 23: Một hộp bi có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Có bao nhiêu cách để lấy 4 viên bi từ hộp sao cho trong 4 viên bi lấy được số bi đỏ lớn hơn số bi vàng?

A. 125 **B.** 275 **C.** 150 **D.** 270

Câu 24: Cho hai đường thẳng song song $d_1;d_2$. Trên đường thẳng d_1 lấy 10 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác tạo thành mà ba đỉnh của nó được chọn từ 25 điểm vừa nói ở trên?

A. $C_{10}^2C_{15}^1$ **B.** $C_{10}^1C_{15}^2$

C. $C_{10}^2C_{15}^1+C_{10}^1C_{15}^2$ **D.** $C_{10}^2C_{15}^1C_{10}^1C_{15}^2$

Câu 25: Từ các chữ số của tập $A=\{1;2;3;4;5;6;7\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số trong đó chữ số 2 xuất hiện đúng ba lần, các chữ số còn lại đôi một khác nhau.

A. 31203 **B.** 12600 **C.** 181440 **D.** 36

Câu 26: Trong mặt phẳng cho 2010 điểm phân biệt sao cho ba điểm bất kì không thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu vectơ mà có điểm đầu và điểm cuối thuộc 2010 điểm đã cho.

A. 4040100 vectơ **B.** 4038090 vectơ

C. 2021055 vectơ **D.**2019045 vectơ

Câu 27: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt $(n\geq 2)$. Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm nói trên. Vậy n có giá trị là

A. 20 **B.** 21 **C.** 30 **D.** 32

Câu 28*: Trong mặt phẳng cho n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi điểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại. Số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau nhiều nhất là bao nhiêu?

A. $2C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-\left[n\left(C_{n-1}^2-1\right)+5C_n^3\right]$

B. $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-2\left[n\left(C_{n-1}^2-1\right)+5C_n^3\right]$

C. $3C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-2\left[nC_{n-1}^2-1+5C_n^3\right]$

D. $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - \left[n\left(C^2_{n-1} - 1\right) + 5C^3_n\right]$

Câu 29: Một bữa tiệc bàn tròn của các câu lạc bộ trong trường Đại học Sư Phạm Hà Nội trong đó có 3 thành viên từ câu lạc bộ Máu Sư Phạm, 5 thành viên từ câu lạc bộ Truyền thông và 7 thành viên từ câu lạc bộ Kỹ năng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho các thành viên sao cho những người cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau.

A. 7257600. **B.** 7293732.
B. 3174012. **D.** 1418746.

Câu 30: Có 7 bông hồng đỏ, 8 bông hồng vàng và 10 bông hồng trắng, các bông hồng khác nhau từng đôi một. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 3 bông hồng có đủ ba màu.

A. 560. **B.** 310. **C.** 314. **D.** 319.

Câu 31: Xếp 6 người (trong đó có 1 cặp vợ chồng) ngồi quanh bàn tròn có 6 cái ghế không ghi số sao cho cặp vợ chồng ngồi cạnh nhau. Số cách xếp là:

A. 240. **B.** 48. **C.** 120. **D.** 24.

Câu 32: Một dãy ghế dài có 10 ghế. Xếp một cặp vợ chồng ngồi vào 2 trong 10 ghế sao cho người vợ ngồi bên phải người chồng (không bắt buộc ngồi gần nhau). Số cách xếp là:

A. 45. **B.** 50. **C.** 55. **D.** 90.

Câu 33: Một đoàn tàu có bốn toa đỗ ở sân ga. Có bốn hành khách bước lên tàu. Số trường hợp có thể xảy ra về cách chọn toa của bốn khách là

A. 24. **B.** 256. **C.** 232. **D.** 1.

Câu 34: Trong một túi đựng 10 viên bi đỏ, 20 viên bi xanh và 15 viên bi vàng. Các viên bi có cùng kích cỡ. Số cách lấy ra 5 viên bi và sắp xếp chúng vào 5 ô sao cho 5 ô bi đó có ít nhất một viên bi đỏ.

A. 146611080. **B.** 38955840.
C. 897127. **D.** 107655240.

Câu 35: Một bộ bài có 52 lá, có 4 loại: cơ, rô, chuồn, bích mỗi loại có 13 lá. Muốn lấy ra 8 lá bài phải có đúng 1 lá cơ, đúng 3 lá rô và không quá 2 lá bích. Hỏi có mấy cách chọn?

A. 39102206. **B.** 22620312.
C. 36443836. **D.** 16481894.

Câu 36: Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau.

A. 900. **B.** 9000. **C.** 90000. **D.** 27216.

Câu 37: Một lớp có n học sinh ($n > 3$).Thầy chủ nhiệm cần chọn ra một nhóm và cần cử ra một học sinh làm nhóm trưởng. Số học sinh trong mỗi nhóm phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn n. Gọi T là số cách chọn, lúc này

A. $T = \sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k$. **B.** $T = n\left(2^{n-1} - 1\right)$.

C. $T = n2^{n-1}$. **D.** $T = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$.

Câu 38: Trong một căn phòng có 36 người trong đó có 25 người họ Nguyễn, 11 người họ Trần. Trong số những người họ Nguyễn có 8 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 9 người còn lại (gồm 4 nam và 5 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Trong 11 người họ Trần, có 3 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 5 người còn lại (gồm 2 nam và 3 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Chọn ngẫu nhiên 2 người.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính?

A. 156. **B.** 30. **C.** 186. **D.** 126.

b) Có bao nhiêu cách chọn hai người sao cho không có cặp anh em ruột nào?

A. 619. **B.** 630. **C.** 11. **D.** 25.

BÀI KIỂM TRA CHỦ ĐỀ II

Xem đáp án chi tiết tại trang 168

Câu 1: Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 38 học sinh?

A. A_{38}^2. **B.** C_{38}^2. **C.** 2^{38}. **D.** 38^2.

Câu 2: Từ một hộp chứa 7 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được ba quả cầu màu xanh bằng

A. $\frac{5}{12}$. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** $\frac{1}{22}$. **D.** $\frac{7}{44}$.

Câu 3: Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^6+(2x-1)^8$ bằng

A. 577. **B.** 3007. **C.** –3007. **D.** –577.

Câu 4: Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;19]$. Xác suất để ba số viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{109}{323}$. **B.** $\frac{2287}{6859}$. **C.** $\frac{2539}{6859}$. **D.** $\frac{1027}{6859}$.

Câu 5: Sắp xếp ba quyển sách Toán khác nhau và ba quyển sách Vật Lý khác nhau lên một kệ dài. Tính xác suất để hai quyển sách cùng một môn nằm cạnh nhau.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{10}$. **C.** $\frac{1}{20}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 6: Cho tam giác ABC. Xét tập hợp đường thẳng gồm 4 đường thẳng song song với AB, 5 đường thẳng song song với BC và 6 đường thẳng song song với CA. Hỏi các đường thẳng này tạo được bao nhiêu hình thang không là hình bình hành.

A. 720. **B.** 540. **C.** 900. **D.** 960.

Câu 7: Cho đa giác lồi n đỉnh $(n\ge 4)$. Có bao nhiêu đường chéo tạo thành?

A. $\frac{n(n-2)}{2}$. **B.** $\frac{n(n-3)}{2}$.

C. $n(n-3)$. **D.** $n(n-2)$.

Câu 8: Cho tập $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ A và không bắt đầu bởi 125?

A. 3348. **B.** 3360. **C.** 12. **D.** 840.

Câu 9: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm có 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần?

A. 8695. **B.** 8685. **C.** 8650. **D.**8676.

Câu 10: Trong một trò chơi điện tử, xác suất để game thủ thắng trong một trận là $0,4$ (không có hòa). Hỏi phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để xác suất thắng ít nhất một trận trong loạt chơi đó lớn hơn 0,95?

A. 6. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 4.

Câu 11: Tính tổng $S=3^{16}.C_{16}^0-3^{15}.C_{16}^1+3^{14}.C_{16}^2-...+C_{16}^{16}$.

A. 3^{16}. **B.** 2^{16}. **C.** $3^{16}-1$. **D.** $3^{16}+1$.

Câu 12: Tính tổng

$$S=1.C_{2018}^1+2.C_{2018}^2+3.C_{2018}^3+...+2018.C_{2018}^{2018}.$$

A. $S=2018.2^{2018}$. **B.** $S=2^{2018}$.

C. $S=2018.2^{2017}$. **D.** $S=2017.2^{2017}$.

Câu 13: Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển nhị thức $(1-2x)^{10}$.

A. –15360. **B.** 15360. **C.** –15363. **D.** 15363.

Câu 14: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Giả sử con súc sắc xuất hiện mặt b chấm. Tính xác suất sao cho phương trình $x^2-bx+b-1=0$ (x là ẩn số) có nghiệm lớn hơn 3.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 15: Xác định n biết rằng hệ số của x^n trong khai triển $(1+x+2x^2+...+nx^n)^2$ bằng $6n$

A. $n=5$. **B.** $n=6$. **C.** $n=8$. **D.** $n=13$.

Câu 16: Số tập con của một tập hợp gồm 2018 phần tử là

A. 2018. B. 2.2018. C. $2^{2018}-1$. D. 2^{2018}.

Câu 17: Có 16 đội bóng tham gia thi đấu. Hỏi cần phải tổ chức bao nhiêu trận đấu sao cho hai đội bất kì đều gặp nhau đúng một lần?

A. 8. **B.** 16. **C.** 120. **D.** 240.

Câu 18: Một đa giác đều có 54 đường chéo. Tính số hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác đều đó.

A. 702. **B.** 351. **C.** 30. **D.** 15.

Câu 19: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, lập các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau. Hỏi trong số đó có bao nhiêu số nhỏ hơn 432000?

A. 414. **B.** 360. **C.** 408. **D.** 420.

Câu 20: Có 8 người ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn. Mỗi người cầm một đồng xu cân đối, đồng chất. Cả 8 người đồng thời tung đồng xu. Ai tung được mặt ngửa thì phải đứng dậy, ai tung được mặt sấp thì ngồi yên tại chỗ. Tính xác suất sao cho không có hai người nào ngồi cạnh nhau phải đứng dậy?

A. $\frac{47}{256}$. **B.** $\frac{67}{256}$. **C.** $\frac{55}{256}$. **D.** $\frac{23}{128}$.

Câu 21: Tìm số hạng chính giữa trong khai triển của $(5x+2y)^4$.

A. $6x^2y^2$. **B.** $600x^2y^2$. **C.** $24x^2y^2$. **D.** $60x^2y^2$.

Câu 22: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(3-2x)^{15}$

A. $C_{15}^7 3^8 2^7$. **B.** $-C_{15}^7 3^7 2^8$.

C. $-C_{15}^7 3^8 2^7$. **D.** $C_{15}^7 3^7 2^8$.

Câu 23: Tính tổng $S=C_{10}^0+2.C_{10}^1+2^2.C_{10}^2+...+2^{10}.C_{10}^{10}$

A. $S=2^{10}$. **B.** $S=4^{10}$. **C.** $S=3^{10}$. **D.** $S=3^{11}$.

Câu 24: Cho tổng

$M=C_{2018}^0 3^{2018}+C_{2018}^1 3^{2017}2+C_{2018}^2 3^{2016}2^2+...+C_{2018}^{2018}2^{2018}$.

Khi viết M dưới dạng một số trong hệ thập phân thì số này có bao nhiêu chữ số?

A. 1410. **B.** 1412. **C.** 1413. **D.** 1411.

Câu 25: Trong một hình tứ diện ta tô màu các đỉnh, trung điểm các cạnh, trọng tâm các mặt và trọng tâm tứ diện. Chọn ngẫu nhiên 4 điểm trong số các điểm đã tô màu. Tính xác suất để 4 điểm được chọn là 4 đỉnh của một hình tứ diện

A. $\frac{188}{273}$. **B.** $\frac{1009}{1365}$. **C.** $\frac{245}{273}$. **D.** $\frac{136}{195}$.

Câu 26: Lớp 12B có 25 học sinh được chia thành hai nhóm I và II sao cho mỗi nhóm đều có học sinh nam và nữ, nhóm I gồm 9 học sinh nam. Chọn ra ngẫu nhiên mỗi nhóm 1 học sinh, xác suất để chọn ra được 2 học sinh nam bằng 0,54. Xác suất để chọn ra được hai học sinh nữ bằng

A. 0,42. **B.** 0,04. **C.** 0,23. **D.** 0,46.

Câu 27: Một hộp chứa hai viên bi đỏ, 2 viên bi xanh và 2 viên bi vàng. Bạn Hà lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 viên bi. Sau đó bạn Lâm lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 viên bi nữa. 2 viên bi còn lại trong hộp được bạn Anh lấy ra nốt. Tính xác suất để 2 viên bi bạn Anh lấy ra có cùng màu.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 28: Một máy tính cầm tay bị hỏng không hiển thị được chữ số 1. Chẳng hạn nếu ta bấm số 3131 thì chỉ có số 33 được hiển thị trên màn hình (hai chữ số 3 viết liền nhau, không có khoảng trắng ở giữa). Bạn Hà đã bấm một số có 6 chữ số nhưng chỉ có số 2007 xuất hiện trên màn hình. Tìm số các số mà bạn Hà có thể đã nhập vào máy tính.

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 25.

Câu 29: Cho khai triển

$$\left(1-\frac{2x}{3}\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n.$$

Tìm $\max\{a_0;a_1;a_2;...;a_n\}$ biết $A_{n-2}^2+C_n^{n-2}=188$.

A. $C_{13}^6.\left(-\frac{2}{3}\right)^6$. **B.** $C_{12}^8.\left(-\frac{2}{3}\right)^8$.

C. $C_{13}^7.\left(-\frac{2}{3}\right)^7$. **D.** $C_{13}^8.\left(\frac{2}{3}\right)^7$.

Câu 30: Lập tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 1 số trong các số lập được. Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 25

A. $\frac{11}{432}$. **B.** $\frac{11}{234}$. **C.** $\frac{11}{324}$. **D.** $\frac{11}{342}$.

Câu 31: Mỗi lượt, ta gieo một con xúc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

A. $\frac{397}{1728}$. **B.** $\frac{1385}{1728}$. **C.** $\frac{1331}{1728}$. **D.** $\frac{1603}{1728}$.

Câu 32: Tại siêu thị Big C đang có chương trình giải thưởng lá phiếu may mắn cho 4 khách hàng mua với đơn giá trên 10 triệu đồng. Trên mỗi phiếu có một màu riêng biệt là đỏ, vàng và xanh. Vào thời điểm cuối ngày tổng kết, có tất cả là 10 người phiếu đỏ, 8 người phiếu vàng và 6 người phiếu xanh. Trưởng phòng chi nhánh sẽ tiến hành chọn ngẫu nhiên những người được thưởng. Xác suất những người được giải có đủ cả ba loại lá phiếu là:

A. $\frac{120}{253}$ **B.** $\frac{143}{237}$ **C.** $\frac{163}{251}$ **D.** $\frac{191}{325}$

Câu 33: Tính tổng

$$S=\frac{-C_n^1}{2.3}+\frac{2C_n^2}{3.4}-\frac{3C_n^3}{4.5}+...+\frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$$

A. $\frac{n}{(n+1)(n+2)}$ **B.** $\frac{-2n}{(n+1)(n+2)}$

C. $\frac{-n}{(n+1)(n+2)}$ **D.** $\frac{2n}{(n+1)(n+2)}$

Câu 34: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $P=x(1-2x)^n+x^2(1+3x)^{2n}$. Biết rằng $A_n^2-C_{n+1}^{n-1}=5$

A. 3240 **B.** 3320 **C.** 3210 **D.** 3340

Câu 35: Cho phương trình: $2P_n+6A_n^2-P_nA_n^2=12$. Biết phương trình trên có 2 nghiệm là *a, b*. Giá trị của $S=ab(a+b)$ là

A. 30 **B.** 84 **C.** 20 **D.** 162

Câu 36: Cho tập X = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}. Có thể lập được bao nhiêu số n gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ X, biết trong 3 chữ số đầu tiên phải có mặt chữ số 1.

A. 3000 **B.** 2280 **C.** 2000 **D.** 1750

Câu 37: Trong cụm thi để xét công nhận tốt nghiệp THPT thí sinh phải thi 4 môn trong đó có 3 môn bắt buộc là Toán, Văn, Ngoại ngữ và 1 môn do thí sinh tự chọn trong số các môn: Vật lí, Hóa học, Sinh học, Lịch sử và Địa lí. Trường X có 40 học sinh đăng kí dự thi, trong đó 10 học sinh chọn môn Vật lí và 20 học sinh chọn môn Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ của trường X. Tính xác suất để trong 3 học sinh đó luôn có học sinh chọn môn Vật lí và học sinh chọn môn Hóa học?

A. $\frac{12}{113}$ **B.** $\frac{120}{247}$ **C.** $\frac{134}{247}$ **D.** $\frac{11}{247}$

Câu 38: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển

$$\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)(1+2x)^{18}$$

A. 125970 **B.** 4031040
C. 8062080 **D.** 503880

Câu 39: Tính giá trị của

$$H=C_{13}^0-2C_{13}^1+2^2C_{13}^2-...-2^{13}C_{13}^{13}.$$

A. $H=729$. **B.** $H=1$.
C. $H=-729$. **D.** $H=-1$.

Câu 40: Đề cương ôn tập chương I môn lịch sử lớp 12 có 30 câu. Trong đề thi chọn ngẫu nhiên 10 câu trong 30 câu đó. Một học sinh chỉ nắm được 25 câu trong đề cương đó. Xác suất để trong đề thi có ít nhất 9 câu hỏi nằm trong 25 câu mà học sinh đã nắm được là. (Kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. $P=0,449$ **B.** $P=0,448$
C. $P=0,34$ **D.** $P=0,339$

Câu 41: Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn 3 nút liên tiếp khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B chỉ nhớ được chi tiết 3 nút tạo thành dãy số tăng. Tính xác suất để B mở được cửa phòng học đó biết rằng để nếu bấn sai 3 lần liên tiếp của sẽ tự động khóa lại.

A. $\frac{631}{3375}$ **B.** $\frac{189}{1003}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{1}{15}$

Câu 42: Cho đa giác đều 100 đỉnh nội tiếp một đường tròn. Số tam giác tù được tạo thành từ 3 trong 100 đỉnh của đa giác là

A. 44100 **B.** 78400 **C.** 117600 **D.** 58800

Câu 43: Cho một đa giác (H) có 60 đỉnh nội tiếp một đường tròn (O). Người ta lập một tứ giác tùy ý có bốn đỉnh là các đỉnh của (H). Xác suất để lập được một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H) gần với số nào nhất trong các số sau?

A. $85,40\%$. **B.** $13,45\%$ **C.** $40,35\%$ **D.** $80,70\%$.

Câu 44: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số phân biệt được lập từ các chữ số $0;1;2;3;4;5;6$. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc S. Tính xác suất để lấy được số chẵn và trong mỗi số đó có tổng hai chữ số hàng chục và hàng trăm bằng 5.

A. $\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{11}{70}$. **C.** $\frac{4}{45}$. **D.** $\frac{16}{105}$.

Câu 45: Trong một giải cờ vua gồm nam và nữ vận động viên. Mỗi vận động viên phải chơi hai ván với mỗi vận động viên còn lại. Cho biết có hai vận động viên nữ và số ván các vận động viên nam chơi với nhau hơn số ván họ chơi với hai vận động viên nữ là 84 . Hỏi số ván tất cả các vận động viên đã chơi.

A. 168 **B.** 156 **C.** 132 **D.** 182

Câu 46: Một hộp đựng 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải rút ít nhất bao nhiêu thẻ để xác suất "có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4" phải lớn hơn $\frac{5}{6}$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 47: Cho $P(x)=(1+3x-2x^2)^{20}$. Khai triển $P(x)$ thành đa thức ta được $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{40}x^{40}$. Tính $S=a_1+2a_2+...+40a_{40}$.

A. $S=5.2^{20}$. **B.** $S=-5.2^{21}$.
C. $S=5.2^{21}$. **D.** $S=-5.2^{19}$.

Câu 48: Tính tổng $S=2.1.C_n^2+3.2.C_n^3+...+(n-1)nC_n^n$.

A. $S=n(n+1).2^{n-2}$. **B.** $S=n(n-1).2^{n-2}$.
C. $S=n(n-1).2^{n-1}$. **D.** $S=n(n+1).2^{n-1}$.

Câu 49: Tổng:

$$S=\frac{1}{2017}\Big(2.3C_{2017}^2+3.3^2C_{2017}^3+4.3^3C_{2017}^4 +...+k.3^{k-1}C_{2017}^k+....+2017.3^{2016}.C_{2017}^{2017}\Big)$$

bằng

A. $4^{2016}-1$. **B.** $3^{2016}-1$. **C.** 3^{2016}. **D.** 4^{2016}.

Câu 50: Tung một đồng xu không đồng chất 2020 lần. Biết rằng xác suất xuất hiện mặt sấp là 0,6. TÍnh xác suất để xuất hiện mặt sấp đúng 1010 lần.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $(0,24)^{1010}$.
C. $\frac{2}{3}$. **D.** $C_{2020}^{1010}.(0,24)^{1010}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CHỦ ĐỀ 2

I. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

Câu 1: Đáp án A.

a) Bước 1: Chọn bạn nam có 17 cách

Bước 2: Chọn bạn nữ có 11 cách

Theo quy tắc nhân ta có $17.11=187$ cách

b) Số cách để chọn ra 1 bạn nam làm lớp trưởng là 17.

Số cách để chọn ra 1 bạn nữ làm lớp trưởng là 11.

Vậy có $11+17=28$ cách.

Câu 2: Đáp án C.

Đi từ A đến D có $4.2.3=24$ cách.

Đi từ D về B có $3.2=6$ cách.

Vậy đi từ A đến D rồi quay lại B có $6.24=144$ cách.

Câu 3: Đáp án B.

Gọi A là tập các học sinh khá môn Toán, B là tập các học sinh khá môn Ngữ Văn. Theo đề ta có

$|A|=25;|B|=24;$ và $|A\cap B|=10.$

Theo quy tắc tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn bất kì ta có

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

$=25+24-10=39$

Vậy lớp học có $39+3=42$ học sinh.

Câu 4: Đáp án A

Kí hiệu A, B, C tương ứng là tập hợp các thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán, Vật lý và Hóa học.

$|A|=51;\ |B|=73;\ |C|=64;$

$|A\cap B|=32;\ |B\cap C|=45;$

$|A\cap C|=21;\ |A\cap B\cap C|=10$

Lúc này ta có $A\cup B\cup C$ là tập hợp các học sinh đạt điểm giỏi ở ít nhất một trong ba môn là Toán, Vật lý, Hóa học.

Ta có $|A\cup B\cup C|$

$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|$

$-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$

$=51+73+64-32-45-21+10=100.$

Vậy số thí sinh dự tuyển vào công ty VEDU là $100+767=867.$

Câu 5: Đáp án B.

Theo quy tắc tính số phần tử của ba tập hợp hữu hạn bất kì, ta có số người xem ít nhất một bộ phim là

$28+26+14-8-4-3+2=55$ người.

Vậy số người không xem bất cứ bộ phim nào là $100-55=45$ người.

Câu 6: Đáp án B.

Chọn 1 vở kịch có 2 cách.

Chọn 1 điệu múa có 3 cách.

Chọn 1 bài hát có 6 cách.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $2.3.6=36$ cách.

Câu 7: Đáp án A.

Nhận xét: Bài toán là sự kết hợp giữa quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Do hai viên bi cùng màu không được ở cạnh nhau nên ta có trường hợp sau:

Phương án 1: Các bi đỏ ở vị trí lẻ

Có 8 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 1.

Có 7 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 3.

…

Có 1 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 15.

Suy ra có 8.7.6…3.2.1 cách xếp 8 bi đỏ.

Tương tự có 8.7.6…3.2.1 cách xếp 8 bi xanh.

Vậy có $(8.7...3.2.1)^2$ cách xếp.

Phương án 2: Các bi đỏ ở vị trí chẵn ta cũng có cách xếp tương tự.

Vậy theo quy tắc cộng ta có

$$(8!)^2+(8!)^2=3251404800.$$

Câu 8: Đáp án C.

Cách 1:

Bước 1: Học sinh đầu tiên, giả sử đó là học sinh lớp A có 10 cách chọn ghế.

Bước 2: Có 5 cách chọn ra một học sinh lớp B ngồi vào ghế đối diện.

Bước 3: Có 8 cách chọn ra một học sinh lớp A vào ghế tiếp theo.

Bước 4: Có 4 cách chọn ra học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 5: Có 6 cách chọn ra học sinh lớp A.

Bước 6: Có 3 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 7: Có 4 cách chọn học sinh lớp A vào ghế tiếp.

Bước 8: Có 2 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 9: Có 2 cách chọn học sinh lớp A vào ghế kế tiếp.

Bước 10: Có 1 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Theo quy tắc nhân thì có

$10.5.8.4.6.3.4.2.2.1$

$=(5!)^2.2^5=460800$ cách.

Cách 2:

Vì 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp nên mỗi cặp ghế đối diện nhau sẽ được xếp bởi 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp B.

Số cách xếp 5 học sinh lớp A vào 5 cặp ghế là $5!$ cách.

Số cách xếp 5 học sinh lớp B vào 5 cặp ghế là $5!$ cách.

Số cách xếp chỗ ở mỗi cặp ghế là 2^5 cách.

Theo quy tắc nhân thì có

$$(5!)^2.2^5=460800 \text{ cách.}$$

Câu 9: Đáp án A.

Bước 1: Có 20 cách chọn người đàn ông đầu tiên.

Bước 2: Sau đó chỉ có 1 cách chọn vợ của anh ta.

Bước 3: Có 19 cách chọn người đàn ông tiếp theo.

Bước 4: Sau đó chỉ có 1 cách chọn vợ của anh ta.

Vậy theo quy tắc nhân thì có

$$20.1.19.1=380 \text{ cách.}$$

Câu 10: Đáp án A.

TH1: Số có 10 chữ số 5: chỉ có 1 số duy nhất.

TH2: Số có 9 chữ số 5 và 1 chữ số 2.

Xếp 9 số 5 thành hàng có 1 cách. Khi đó tạo nên 10 "vách ngăn" để xếp số 2.

Xếp số 2 có C_{10}^1 cách. Vậy có C_{10}^1 số.

TH3: Số có 8 chữ số 5 và 2 chữ số 2.

Tương tự sử dụng phương pháp tạo vách ngăn như TH2 thì tìm được C_9^2 số.

TH4: Số có 7 chữ số 5 và 3 chữ số 2: có C_8^3 số.

TH5: Số có 6 chữ số 5 và 4 chữ số 2: có C_7^4 số.

TH6: Có 5 chữ số 5 và 5 chữ số 2: có C_6^5 số.

Vậy theo quy tắc cộng thì có

$1+C_{10}^1+C_9^2+C_8^3+C_7^4+C_6^5=144$ số.

Câu 11: Đáp án A

Ta sử dụng phương pháp tạo "vách ngăn" được giới thiệu ở phần lí thuyết.

Bước 1: Xếp vị trí cho 6 học sinh có $6!$ cách.

Bước 2: Do đề yêu cầu mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh nên ta chỉ tính

5 vách ngăn được tạo ra giữa 6 học sinh. Số cách xếp 3 thầy giáo vào 5 vị trí là A_5^3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $6!.A_5^3 = 43200$ cách.

Câu 12: Đáp án C

Do ở đây việc tìm trực tiếp sẽ có nhiều trường hợp nên ta sẽ giải bài toán bằng cách gián tiếp. Ta sẽ đi tìm bài toán đối.

Ta đi tìm số cách chọn ra 5 bạn mà trong đó có cả hai bạn Thùy và Thiện.

Bước 1: Chọn nhóm 3 em trong 13 em, trừ Thùy và Thiện thì có $C_{13}^3 = 286$ cách.

Bước 2: Ghép 2 em Thùy và Thiện có 1 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có 286 cách chọn 5 em trong đó cả Thùy hoặc Thiện đều được chọn.

- Chọn 5 em bất kì trong số 15 em có $C_{15}^5 = 3003$ cách.

Vậy theo yêu cầu đề bài thì có tất cả $3003 - 286 = 2717$ cách chọn mà trong đó có ít nhất một trong hai em Thùy và Thiện không được chọn.

Câu 13: Đáp án A.

Do ở đây xuất hiện dấu hiệu của phương pháp "buộc" phần tử đó là các phần tử được xếp cạnh nhau nên ta áp dụng như sau:

Bước 1: Buộc 3 em nữ thành một buộc thì số cách đổi vị trí các em nữ trong buộc đó là $3!$ cách.

Bước 2: Sau khi buộc 3 em nữ thì ta chỉ còn 8 phần tử. Số cách xếp 8 phần tử này là $8!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có

$$3!.8! = 241920 \text{ cách.}$$

Câu 14: Đáp án D.

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần lập.

Theo giả thiết $a_3 + a_4 + a_5 = 8$.

Suy ra $a_3; a_4; a_5 \in \{1;2;5\}$

hoặc $a_3; a_4; a_5 \in \{1;3;4\}$

TH1: $a_3; a_4; a_5 \in \{1;2;5\}$

Có $3!$ cách chọn $\overline{a_3a_4a_5}$

Xếp $a_1; a_2; a_6$ có A_6^3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có

$$3!.A_6^3 = 720 \text{ số.}$$

TH2: Tương tự ta cũng tìm được 720 số.

Vậy có tất cả $720 + 720 = 1440$ số.

Câu 15: Đáp án C.

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ là C_{2n}^3.

Ứng với hai đường chéo đi qua tâm của đa giác $A_1A_2...A_{2n}$ cho tương ứng một hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 điểm trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ và ngược lại mỗi hình chữ nhật như vậy sẽ cho ra 2 đường chéo đi qua tâm O của đa giác.

Mà số đường chéo đi qua tâm của đa giác đều $2n$ đỉnh là n nên số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm là C_n^2.

Theo đề bài ta có: $C_{2n}^3 = 20C_n^2$

$$\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \frac{20n(n-1)}{2}$$

$\Leftrightarrow n = 8.$

Câu 16: Đáp án C.

Số cách chọn ra 3 màu trong 5 màu mà không có màu nào trùng nhau là

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!.2!}$$

Câu 17: Đáp án B.

Bước 1: Xếp chỗ cho hai ông bà An có 2 cách.

Bước 2: Xếp chỗ cho 6 người con có $6!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có $2.6! = 1440$ cách.

Câu 18: Đáp án B.

Xét các trường hợp:

TH1: Đề gồm 2 câu dễ, 2 câu khó, 1 câu trung bình thì có

$$C_{15}^2C_5^2C_{10}^1 = 10500 \text{ đề.}$$

TH2: Đề gồm 2 câu dễ, 1 câu khó và 2 câu trung bình thì có

$$C_{15}^2C_5^1C_{10}^2 = 23625 \text{ đề.}$$

TH3: Đề gồm 3 câu dễ, 1 câu khó và 1 câu trung bình thì có

$$C_{15}^3C_5^1C_{10}^1 = 22750 \text{ đề.}$$

Theo quy tắc cộng thì có

$$10500 + 23625 + 22750 = 56875 \text{ đề.}$$

Câu 19: Đáp án C.

Số trận đấu diễn ra trong vòng 1: $4.C_4^2 = 24$.

Số trận đấu diễn ra trong vòng 2: 2.

Số trận đấu diễn ra trong vòng 3: 2.

Có tất cả 28 trận đấu.

Vậy ban tổ chức cần mượn sân trong $\frac{28}{4} = 7$ ngày.

Câu 20: Đáp án A.

Có $C_4^2 = 6$ cách chọn 2 trong 4 tiêu chuẩn.

Với hai tiêu chuẩn: "chất liệu, cỡ" thì có $1.2 = 2$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, màu" có $1.3 = 3$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, dạng" có $1.3 = 3$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "cỡ, dạng" có $2.3 = 6$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "cỡ, màu" có $3.3 = 9$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Tóm lại có $2+3+3+6+6+9 = 29$ miếng.

Câu 21: Đáp án A.

Ta thấy điều kiện xếp là hai bi cùng màu không nằm cạnh nhau nên ta phải xếp xen kẽ các viên bi.

Có 2 cách chọn viên bi đầu tiên (có thể là đỏ hoặc trắng)

Mỗi cách chọn đó có $5!$ cách xếp 5 bi đỏ và có $5!$ cách xếp bi 5 trắng.

Vậy có $2.5!.5! = 28800$ cách xếp.

Nhiều bạn có lời giải sai như sau: Ở đây ta sẽ áp dụng quy tắc "vách ngăn" để giải quyết bài toán.

Số cách xếp 5 bi đỏ là $5!$ cách.

5 bi đỏ sẽ tạo ra 6 vách ngăn để xếp 5 bi trắng vào. Số cách xếp 5 bi trắng là A_6^5 cách.

Vậy số cách xếp các viên bi là $5!.A_6^5 = 86400$. Từ đây chọn B là sai.

Do nếu theo quy tắc vách ngăn ở đây có 6 vách mà có 5 bi, tức là có thể sẽ có vách ngăn để trống khiến cho 2 viên bi cùng màu cạnh nhau.

Câu 22: Đáp án A.

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{abcde}$

TH1: Nếu $a = 1$ khi đó có $A_7^4 = 840$ cách chọn 4 chữ số xếp vào b, c, d, e.

TH2: Nếu $a \neq 1$, khi đó

Có 6 cách chọn a.

Có 2 cách xếp chữ số 1 vào số cần tạo ở vị trí b hoặc vị trí c.

Các chữ số còn lại trong số cần tạo có A_6^3 cách chọn.

Như vậy trường hợp này có $2.6.A_6^3=1440$ số.

Vậy có tất cả $840+1440=2280$ số.

Chú ý: Nhiều độc giả quên mất $a\neq 0$ nên tính cả $a=0$ dẫn đến ra D là sai.

Câu 23: Đáp án B

Các trường hợp lấy được 4 bi trong đó số bi đỏ lớn hơn số bi vàng như sau:

* **TH1:** Số bi lấy được không có bi vàng:

- Lấy 4 bi đỏ: Có C_5^4 cách.
- Lấy 1 bi đỏ, 3 bi xanh có $C_5^1.C_4^3$ cách.
- Lấy 2 bi đỏ, 2 bi xanh có $C_5^2.C_4^2$ cách.
- Lấy 3 bi đỏ, 1 bi xanh có $C_5^3.C_4^1$ cách.

***TH2:** 4 bi lấy được có đúng 1 bi vàng.

- Lấy được 2 bi đỏ, 1 bi vàng, 1 bi xanh có $C_5^2.C_3^1.C_4^1$ cách.
- Lấy được 3 bi đỏ, 1 bi vàng có $C_5^3.C_3^1$ cách.

Vậy số cách là $C_5^4+C_5^1.C_4^3+C_5^2.C_4^2$ $+C_5^3.C_4^1+C_5^2.C_3^1.C_4^1+C_5^3.C_3^1=275.$

Câu 24: Đáp án C.

Ta có 2 trường hợp:

TH1: Tam giác gồm hai đỉnh thuộc d_1 và một đỉnh thuộc d_2

- Số cách chọn bộ hai điểm trong 10 điểm thuộc d_1 là C_{10}^2

Số cách chọn một điểm trong 15 điểm thuộc d_2 là C_{15}^1

Theo quy tắc nhân thì có $C_{10}^2.C_{15}^1$ tam giác.

TH2: Gồm 1 đỉnh thuộc d_1 và hai đỉnh thuộc d_2

Tương tự ta tìm được $C_{10}^1.C_{15}^2$ tam giác thỏa mãn.

Vậy theo quy tắc cộng thì có tất cả $C_{10}^2.C_{15}^1+C_{10}^1C_{15}^2$ tam giác.

Câu 25: Đáp án B.

Có C_7^3 cách để xếp 3 chữ số 2.

Khi đó có A_6^4 cách xếp 4 chữ số còn lại. Vậy có $C_7^3.A_6^4=12600$ số.

Câu 26: Đáp án A.

Cách 1: Chú ý: *Bài toán không nói vectơ có khác vectơ không nên ta vẫn xét cả vectơ không ở đây. Và 2 điểm khác nhau tạo nên 2 vectơ có điểm đầu và điểm cuối hoán vị cho nhau cho nên ở đây việc chọn vectơ sẽ sử dụng chỉnh hợp chứ không phải tổ hợp.*

TH1: Có 2010 vectơ không được tạo thành.

TH2: Các vectơ khác vectơ không:

Mỗi vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán ứng với một chỉnh hợp chập 2 của 2010, nên số vectơ cần tìm là A_{2010}^2

Theo quy tắc cộng thì có

$A_{2010}^2+2010=4040100$ vectơ tạo thành.

Cách 2: Có 2010 cách chọn điểm đầu. Có 2010 cách chọn điểm cuối.

$\Rightarrow$ Có $2010^2=4040100$ vectơ

Câu 27: Đáp án A.

Tương tự Câu 24 ta có số tam giác được tạo thành theo n là

$C_{10}^1C_n^2+C_{10}^2C_n^1=2800$

$\Leftrightarrow 10\dfrac{n(n-1)}{2}+45n=2800$

$\Leftrightarrow n^2+8n-560=0\Leftrightarrow n=20.$

Câu 28: Đáp án D.

* Gọi n điểm đã cho là $A_1,A_2,...,A_n$.

Xét một điểm cố định, khi đó có C_{n-1}^2 đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại nên sẽ có C_{n-1}^2 đường thẳng vuông góc đi qua điểm cố định đó.

* Do đó có tất cả

$nC_{n-1}^2=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên có $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}$ giao điểm (tính cả những giao điểm trùng nhau).

* Ta chia các điểm trùng nhau thành 3 loại

- Qua một điểm có

$C_{n-1}^2=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên ta phải trừ đi $n\left(C_{n-1}^2-1\right)$ điểm.

- Qua 3 điểm A_1,A_2,A_3 của 1 tam giác có 3 đường thẳng cùng vuông góc với A_4A_5 và 3 đường thẳng này song song với nhau nên ta mất 3 giao điểm, do đó trong TH này ta phải loại đi $3C_n^3$

- Trong mỗi tam giác thì ba đường cao chỉ có một giao điểm, nên ta mất 2 điểm cho mỗi tam giác, do đó trường hợp này ta phải trừ đi $2C_n^3$

Vậy số giao điểm nhiều nhất có được là $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-\left[n\left(C_{n-1}^2-1\right)+5C_n^3\right]$.

Câu 29: Đáp án A.

Do các thành viên cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau nên ta sẽ sử dụng phương pháp "buộc" các phần tử để giải quyết bài toán.

Lúc này ta có 3 phần tử đó là 3 câu lạc bộ. Theo công thức hoán vị vòng quanh được giới thiệu ở phần ví dụ thì ta có $2!$ cách xếp 3 câu lạc bộ vào bàn tròn.

Với mỗi cách xếp thì có:

$3!$ cách xếp các thành viên CLB Máu Sư phạm.

$5!$ cách xếp các thành viên CLB Truyền thông.

$7!$ cách xếp các thành viên CLB Kỹ năng.

Vậy theo quy tắc nhân thì có tất cả

$2!.3!.5!.7!=7257600$ cách xếp.

Câu 30: Đáp án A.

Cách 1: Số cách lấy 3 bông hồng bất kì: $C_{25}^3=2300$

Số cách lấy 3 bông hông chỉ có một màu: $C_7^3+C_8^3+C_{10}^3=211$

Số cách lấy 3 bông hồng có đúng hai màu:

$C_{15}^3+C_{17}^3+C_{18}^3-2\left(C_7^3+C_8^3+C_{10}^3\right)=1529.$

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2300-211-1529=560$.

Cách 2: Có 7 cách chọn bông hồng màu đỏ.

Có 8 cách chọn bông hồng vàng.

Có 10 cách chọn bông hồng trắng.

$\Rightarrow$ Có $7.8.10=560$ cách.

Câu 31: Đáp án B.

Áp dụng quy tắc "buộc" các phần tử ta có $2!$ cách xếp 2 vợ chồng.

Sau khi "buộc" hai vợ chồng lại thì ta có tất cả 5 phần tử. Theo công thức hoán vị vòng quanh thì số cách xếp 5 phần tử quanh bàn tròn là $4!$

Vậy theo quy tắc nhân thì có

$2!.4!=48.$

Câu 32: Đáp án A.

Ta lần lượt đánh số các ghế từ 1 đến 10.

- Nếu người chồng ở vị trí số 1 thì có 9 cách xếp người vợ.

- Nếu người chồng ở vị trí số 2 thì có 8 cách xếp người vợ.

…

- Nếu người chồng ở vị trí số 9 thì có 1 cách xếp người vợ.

Vậy có tất cả

$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ cách.

Câu 33: Đáp án B

Chọn toa cho vị khách thứ nhất có 4 cách.

Chọn toa cho vị khách thứ hai có 4 cách.

Chọn toa cho vị khách thứ ba có 4 cách.

Chọn toa cho vị khách thứ tư có 4 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $4^4=256$ cách chọn toa cho bốn khách.

Câu 34: Đáp án D.

Bước 1: Chọn bi

- Số cách chọn ra 5 viên bi bất kì là C_{45}^5 cách.

- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó không có viên bi đỏ nào là C_{35}^5 cách.

- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $C_{45}^5-C_{35}^5$ cách.

Bước 2: Sắp xếp các viên bi.

Số cách xếp 5 viên bi vào 5 ô là 5!

Theo quy tắc nhân thì có

$$5!.\left(C_{45}^5-C_{35}^5\right)=107655240.$$

Câu 35: Đáp án A.

Xét các trường hợp sau:

- Lấy được 1 lá cơ, 3 lá rô, 2 lá bích và 2 lá chuồn thì có

$$C_{13}^1C_{13}^3C_{13}^2C_{13}^2=22620312 \text{ cách lấy.}$$

- Lấy được 1 lá cơ, 3 lá rô, 1 lá bích và 3 lá chuồn thì có

$$C_{13}^1C_{13}^3C_{13}^1C_{13}^3=13823524 \text{ cách lấy.}$$

- Lấy được 1 lá cơ, 3 lá rô và 4 lá chuồn thì có $C_{13}^1C_{13}^3C_{13}^4=2658370$ cách lấy.

Theo quy tắc cộng thì có tất cả

$22620312+13823524+2658370$

$=39102206$ cách lấy.

Câu 36: Đáp án A.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcab}$.

Có 9 cách chọn a.

Có 10 cách chọn b.

Có 10 cách chọn c.

Vậy có tất cả $9.10.10=900$ số.

Câu 37: Đáp án A.

Gọi A_k là phương án: Chọn nhóm có k học sinh và chỉ định nhóm trưởng của nhóm.

Thầy chủ nhiệm có các phương án $A_2,A_3,A_4,...,A_{n-1}$. Ta tính xem A_k có bao nhiêu cách thực hiện.

Phương án A_k có hai công đoạn:

- Công đoạn 1: Chọn k học sinh có C_n^k cách chọn.

- Công đoạn 2: Chỉ định nhóm trưởng: có k cách chọn.

Theo quy tắc nhân thì phương án A_k có kC_n^k cách thực hiện.

Vậy theo quy tắc cộng thì $T=\sum_{k=2}^{n-1}kC_n^k$.

Câu 38: a) Đáp án C.

* Có $8+4=12$ nam họ Nguyễn và có $8+5=13$ nữ họ Nguyễn. Vậy có $12.13=156$ cặp cùng họ Nguyễn mà khác giới tính.

* Tương tự có $5.6=30$ cách chọn cặp cùng họ Trần mà khác giới tính.

Vậy có $156+30=186$ cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính.

b) Đáp án A.

Ta có $8+3=11$ cặp anh em trong đó có 8 cặp họ Nguyễn và 3 cặp họ Trần.

Chọn bất kì 2 người trong số 36 người thì có $C_{36}^2=630$ cách chọn.

Vậy có tất cả $630-11=619$ cách chọn các cặp sao cho không có cặp anh em nào.

II. NHỊ THỨC NEWTON

Câu 1: Đáp án B.

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}=\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21}$$

$$=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^k\left(b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k a^{\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}}b^{-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2}}$$

Hệ số của số hạng có số mũ của a và b bằng nhau ứng với:

$$\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}=-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2}\Leftrightarrow k=12$$

Vậy số hạng cần tìm là $C_{21}^{12}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$.

Câu 2: Đáp án A.

Ta có

$$(1+2x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(2x)^k=\sum_{k=0}^{n}2^kC_n^kx^k$$

$\Rightarrow a_k=2^kC_n^k$.

Do đó $k\dfrac{a_k}{a_{k-1}}=k\dfrac{2^kC_n^k}{2^{k-1}C_n^{k-1}}$

$$=2k.\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}$$

$$=2k.\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{n-k+1}}=2(n-k+1).$$

Theo giả thiết có:

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\frac{a_k}{a_{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}2(n-k+1)$$

$$=2(1+2+3+...+n)$$

$$=\frac{2n(n+1)}{2}=n(n+1)=72$$

$\Rightarrow n=8.$

Câu 3: Đáp án C.

Số hạng tổng quát sau khi khai triển $T_{k+1}=C_{10}^kx^k$

Số hạng chứa x^5 trong khai triển là $C_{10}^5x^5$.

Đề bài hỏi hệ số nên ta chọn C.

Câu 4: Đáp án D.

Ta có

$$\left(\frac{4}{x}-3x^3\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k\left(\frac{4}{x}\right)^k\left(-3x^3\right)^{15-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{15}(-3)^{15-k}4^kC_{15}^kx^{45-4k}$$

Số hạng chứa x^9 tương ứng với $45-4k=9\Leftrightarrow k=9$ nên hệ số của x^9 trong khai triển trên là

$$(-3)^6 4^9C_{15}^9=3^64^9C_{15}^9.$$

Câu 5: Đáp án C.

Ta có

$$\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^k\left(2\sqrt{x}\right)^k\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{20}2^kC_{20}^k\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^k\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{20-k}=\sum_{k=0}^{20}2^kC_{20}^kx^{\frac{5k-40}{6}}$$

Số hạng không chứa x tương ứng với $\dfrac{5k-40}{6}=0\Leftrightarrow k=8$.

Do vậy số hạng đó là: $2^8C_{20}^8$.

Câu 6: Đáp án A.

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau:

Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(x^2+\dfrac{1}{x}-1\right)^{10}$