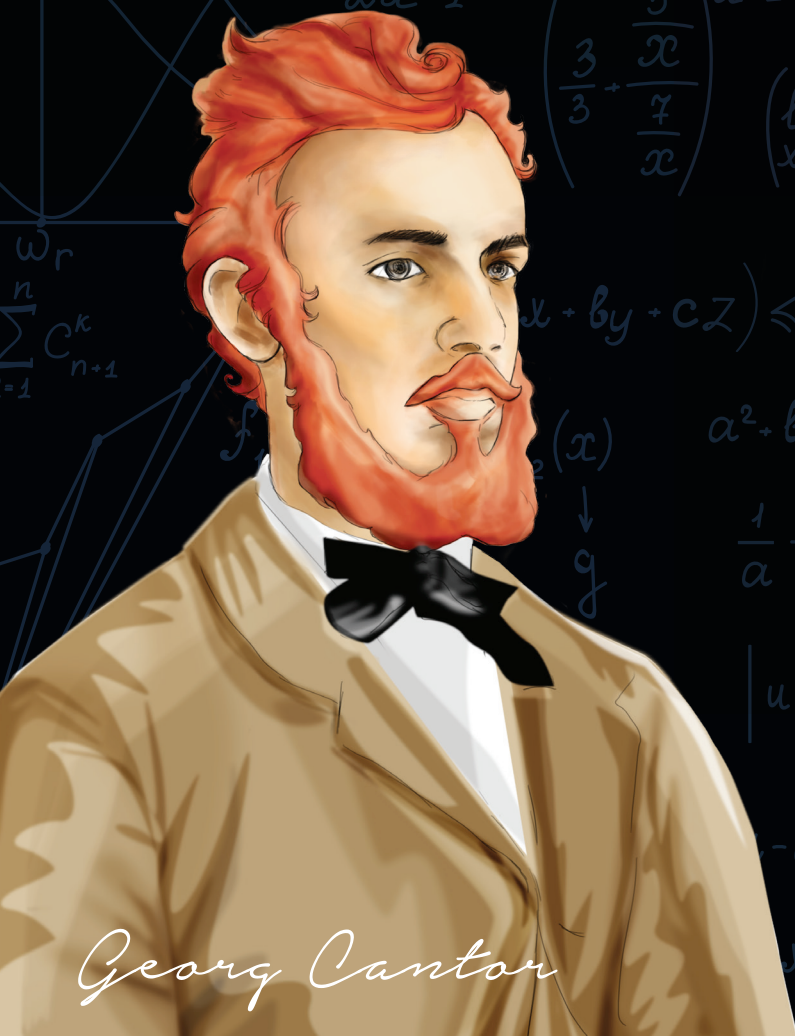
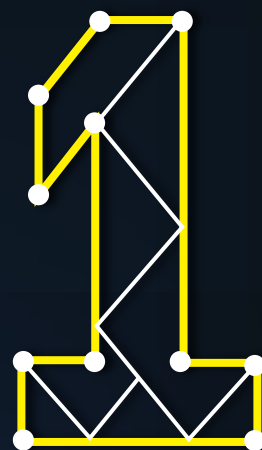


CHÂU VĂN ĐIỆP - ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
NGỌC HUYỀN LB - PHẠM TUẤN NGHỊ
ĐỖ THỊ THÚY NGỌC - NGUYỄN TRƯỜNG SƠN
NGUYỄN TIÊN TIẾN



Georg Cantor

CÔNG PHÁP TOÁN



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Nắm chắc phương pháp giải nhanh toán trắc nghiệm lớp 10
Xây dựng nền tảng vững chắc chuẩn bị cho kì thi THPT Quốc gia
Tặng kèm 20 Đề kiểm tra 45' và Đề thi Học kì chọn lọc

MỘT SỐ SẢN PHẨM ĐÃ VÀ SẴN PHÁT HÀNH

- Công phá Toán 1
- Công phá Toán 2
- Công phá Toán 3
- Công phá Kỹ Thuật Casio lớp 10-11-12
- Công phá Tiếng Anh 1
- Công phá Tiếng Anh 2
- Công phá Tiếng Anh 3
- Chinh phục bài tập từ vựng Tiếng Anh
- Chinh phục bài tập điền từ vào đoạn văn Tiếng Anh
- Công phá lý thuyết Hóa
- Công phá bài tập Hóa
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Toán
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Vật lý
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Hóa
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Sinh
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Tiếng Anh
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Ngữ văn
- Công phá Vật lý 1
- Công phá Vật lý 2
- Công phá Vật lý 3
- Công phá lý thuyết Sinh
- Công phá bài tập Sinh
- Công phá Ngữ văn 1
- Công phá Ngữ văn 2

HỆ THỐNG ĐẠI LÝ PHÁT HÀNH

Miền Bắc:

1. Hệ thống siêu thị Tiên Phong
2. Nhà sách ADC Book
3. Hệ thống siêu thị Fahasa
4. Nhà sách Tiến Thọ
6. Nhà sách Minh Thắng
7. Nhà sách Quảng Lợi
8. Nhà sách Bình Thủy
9. Cửa hàng sách khu vực Trần Quốc Hoàn
10. Cửa hàng sách khu vực Đinh Lễ
11. Hệ thống sách Phương Nam
12. Nhà sách Trí Tuệ

Miền Nam

1. Hệ thống siêu thị Fahasa
 2. Hệ thống nhà sách Minh Khai
 3. Hệ thống nhà sách Phương Nam
 4. Nhà sách Đức Trí
- Nhà sách Online**
1. Nhà sách Tiki: tiki.vn
 2. Nhà sách Newshop: newshop.vn
 3. Nhà sách Pibook: pibook.vn
 4. Nhà sách Tictak: tictak.vn
 5. Nhà sách Fahasa: fahasa.com
 6. Nhà sách Vinabook: vinabook.com

NHÀ SÁCH GIÁO DỤC LOVEBOOK

Địa chỉ : Số 43 ngõ 111 Cù Chính Lan, phường Khương Mai, Thanh Xuân, Hà Nội
 Điện thoại : 19002825 – 02477790839
 Email : lovebook.vn@gmail.com
 Website : http://lovebook.vn
 Fanpage : http://facebook.com/lovebook.vn

ISBN: 978 - 604 - 62 - 6781-2



9 786046 267812

MORE THAN A BOOK

GIÁ 179.000 đ

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP	15
§1. Mệnh đề	15
A. Lý thuyết	15
B. Các dạng toán điển hình	15
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	18
§2. Tập hợp – Các phép toán trên tập hợp	19
A. Lý thuyết	19
B. Các dạng toán điển hình	20
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	27
§3. Các tập hợp số	28
A. Lý thuyết	28
B. Các dạng toán điển hình	28
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	32
§4. Số gần đúng. Sai số	33
A. Lý thuyết	33
B. Các dạng toán điển hình	33
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	35
Bài kiểm tra chủ đề 1	36
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 1	38
CHỦ ĐỀ 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI	41
§1. Đại cương về hàm số	41
A. Lý thuyết	41
B. Các dạng toán điển hình	46
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	55
§2. Hàm số bậc nhất	58
A. Lý thuyết	58
B. Các dạng toán điển hình	58
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	63
§3. Hàm số bậc hai	64
A. Lý thuyết	64

B. Các dạng toán điển hình	65
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	71
Bài kiểm tra chủ đề 2	72
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 2	76

CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH 88

§1. Khái niệm phương trình	88
A. Lý thuyết	88
B. Các dạng toán điển hình	89
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	96
§2. Phương trình bậc nhất và quy về bậc nhất	97
A. Lý thuyết	97
B. Các dạng toán điển hình	97
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	101
§3. Phương trình bậc hai và quy về bậc hai	102
A. Lý thuyết	102
B. Các dạng toán điển hình	102
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	114
§4. Hệ phương trình	116
A. Các dạng toán điển hình	116
B. Bài tập rèn luyện kĩ năng	125
Bài kiểm tra chủ đề 3	126
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 3	129

CHỦ ĐỀ 4: BẤT ĐẲNG THỨC 139

A. Lý thuyết	139
B. Các dạng toán điển hình	160
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	187
Bài kiểm tra chủ đề 4	190
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 4	193

CHỦ ĐỀ 5: BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH 199

§1. Bất phương trình, hệ bất phương trình một ẩn	199
A. Lý thuyết	199
B. Các dạng toán điển hình	211

C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	217
§2. Bất phương trình, hệ bất phương trình hai ẩn	218
A. Lý thuyết	218
B. Các dạng toán điển hình	220
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	223
Bài kiểm tra chủ đề 5	224
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 5	228
CHỦ ĐỀ 6: THỐNG KÊ	236
A. Lý thuyết	236
B. Bài tập rèn luyện kĩ năng	240
Hướng dẫn giải chi tiết	242
CHỦ ĐỀ 7: CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	243
§1. Cung và góc lượng giác	243
A. Lý thuyết	243
B. Các dạng toán điển hình	246
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	250
§2. Giá trị lượng giác của một cung. Công thức lượng giác	251
A. Lý thuyết và các dạng toán điển hình	251
B. Bài tập rèn luyện kĩ năng	262
Bài kiểm tra chủ đề 7	265
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 7	268
CHỦ ĐỀ 8: VECTƠ	278
§1. Định nghĩa và các phép toán vectơ	278
A. Lý thuyết	278
B. Các dạng toán điển hình	280
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	297
§2. Trục tọa độ và hệ trục tọa độ	305
A. Lý thuyết	305
B. Các dạng toán điển hình	306
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	313
Bài kiểm tra chủ đề 8	316
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 8	320

CHỦ ĐỀ 9: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG 333

§1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì từ 0^0 đến 180^0	333
A. Lý thuyết	333
B. Các dạng toán điển hình	335
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	348
§2. Tích vô hướng của hai vectơ	350
A. Lý thuyết	350
B. Các dạng toán điển hình	351
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	363
§3. Các hệ thức lượng trong tam giác	366
A. Lý thuyết	366
B. Các dạng toán điển hình	367
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	376
Bài kiểm tra chủ đề 9	381
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 9	384

CHỦ ĐỀ 10: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG 401

§1. Phương trình đường thẳng	401
A. Lý thuyết	401
B. Các dạng toán điển hình	411
§2. Phương trình đường tròn	416
A. Lý thuyết	416
B. Các dạng toán điển hình	419
C. Bài tập rèn luyện kĩ năng	425
§3. Phương trình đường elip	428
A. Lý thuyết	428
B. Các dạng toán điển hình	432
§4. Một số dạng bài toán điển hình	438
I. Một số bài toán về giải tam giác	438
II. Một số bài toán sử dụng tính chất hình học phẳng	450
III. Một số bài toán cực trị	457
Bài tập rèn luyện kĩ năng	461
Bài kiểm tra chủ đề 10	463
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 10	467

TRA CỨU THUẬT NGỮ 482

Chủ đề 5

Vấn đề cần nắm:

1. Bất phương trình, hệ bất phương trình một ẩn
2. Bất phương trình, hệ bất phương trình hai ẩn

BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Bất phương trình là khái niệm mà học sinh đã được làm quen ở cấp THCS. Chủ đề này sẽ hoàn thiện hơn khái niệm bất phương trình, đồng thời cung cấp cho học sinh những kiến thức mới như vấn đề xét dấu của nhị thức bậc nhất và dấu của tam thức bậc hai. Chúng có nhiều ứng dụng quan trọng trong việc giải và biện luận các phương trình và bất phương trình. Học sinh cần nắm vững các kiến thức đó, đồng thời rèn luyện kỹ năng áp dụng chúng để giải các bài toán trong khuôn khổ của chương trình lớp 10.



§1. Bất phương trình, hệ bất phương trình một ẩn

A. Lý thuyết

1. Đại cương về bất phương trình

1. Khái niệm bất phương trình một ẩn

- Định nghĩa:

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g .
Đặt $D = D_f \cap D_g$. Mệnh đề chứa biến “ $f(x) < g(x)$ ” được gọi là bất phương trình một ẩn, x được gọi là ẩn số (hay ẩn) và D được gọi là tập xác định của bất phương trình.

- Số $x_0 \in D$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình $f(x) < g(x)$ nếu “ $f(x_0) < g(x_0)$ ” là một mệnh đề đúng.

- Giải bất phương trình $f(x) < g(x)$ là đi tìm tất cả các nghiệm của nó, tức là tập hợp $S = \{x \in D \mid f(x) < g(x)\}$, S được gọi là tập nghiệm của bất phương trình. Nếu $S = \emptyset$ thì ta nói bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 1: Số -2 thuộc tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

A. $2x + 1 > 1 - x$.

B. $(2x + 1)(1 - x) < x^2$.

C. $\frac{1}{1-x} + 2 \leq 0$.

D. $(2 - x)(x + 2)^2 < 0$.

Lời giải

Ta có “ $[2 \cdot (-2) + 1][1 - (-2)] < (-2)^2$ ” là một mệnh đề đúng. Vậy -2 thuộc tập nghiệm của bất phương trình $(2x + 1)(1 - x) < x^2$.

(Ta còn nói -2 thỏa mãn bất phương trình $(2x + 1)(1 - x) < x^2$).

Đáp án B.

Lưu ý: Trong thực hành ta không cần viết rõ tập D mà chỉ cần tìm điều kiện của x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa. Điều kiện đó được gọi là điều kiện xác định (hay gọi tắt là điều kiện) của bất phương trình.

Ví dụ 2: Điều kiện của bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x-2}} > \frac{\sqrt{6-x}}{x} + 3$ là $x - 2 > 0$, $6 - x \geq 0$ và $x \neq 0$.

LƯU Ý

Ta trình bày lý thuyết cho bất phương trình $f(x) < g(x)$. Các kết quả này cũng đúng cho các bất phương trình $f(x) \leq g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$.

STUDY TIP

- + Biểu thức $\frac{A(x)}{B(x)}$ xác định khi và chỉ khi $A(x), B(x)$ xác định và $B(x) \neq 0$.
- + Biểu thức $\sqrt{A(x)}$ xác định khi và chỉ khi $A(x) \geq 0$.
- + Biểu thức $\frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$ xác định khi và chỉ khi $A(x)$ xác định và $B(x) > 0$.
- + Biểu thức $\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)}$ xác định khi và chỉ khi $A(x) \geq 0$ và $B(x) \geq 0$.

2. Hệ bất phương trình một ẩn

- Định nghĩa:

Hệ bất phương trình một ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng.

- Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.
- Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.
- Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình trong hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm của các bất phương trình đó.

3. Một số phép biến đổi bất phương trình

- Định nghĩa:

Hai bất phương trình có cùng tập nghiệm (có thể rỗng) là hai bất phương trình tương đương.

Nếu bất phương trình $f(x) < g(x)$ tương đương với bất phương trình $h(x) < k(x)$ thì ta viết $f(x) < g(x) \Leftrightarrow h(x) < k(x)$.

- Định nghĩa:

Phép biến đổi tương đương là phép biến đổi một bất phương trình thành một bất phương trình tương đương với nó.

Định lý:

Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định là D ; $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên D . Khi đó trên D , ta có:

- + $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$.
- + $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ nếu $h(x) > 0 \forall x \in D$.
- + $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ nếu $h(x) < 0 \forall x \in D$.
- + $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x)$ nếu $f(x) \geq 0; g(x) \geq 0 \forall x \in D$.

Hệ quả: $f(x) < g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) - h(x) < g(x)$.

Ví dụ 3: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + \frac{3}{5} \geq x + 2 & (1) \\ \frac{6x - 3}{2} \leq 2x + 1 & (2) \end{cases}$ là:

- A. $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$. C. $\left[\frac{7}{10}; \frac{5}{2}\right]$. D. $\left(-\infty; \frac{7}{10}\right]$.

Lời giải

Giải từng bất phương trình ta có:

$$* 3x + \frac{3}{5} \geq x + 2 \Leftrightarrow 3x - x \geq 2 - \frac{3}{5} \text{ (chuyển vế, đổi dấu)}$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq \frac{7}{5} \text{ (rút gọn từng vế của bất phương trình)}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{7}{10} \text{ (chia cả hai vế cho } 2 > 0 \text{)}.$$

$$* \frac{6x - 3}{2} \leq 2x + 1 \Leftrightarrow 6x - 3 \leq 4x + 2 \text{ (nhân cả hai vế với } 2 > 0 \text{)}$$

LƯU Ý

Định nghĩa tương tự cho hệ bất phương trình.

LƯU Ý

$h(x)$ có thể là một hằng số.

STUDY TIP

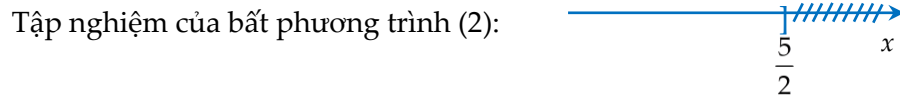
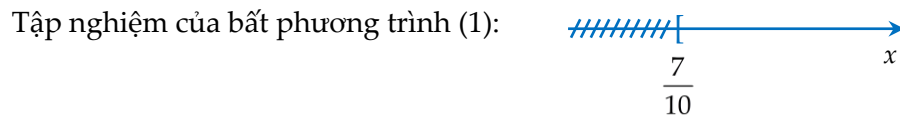
Chuyển vế và đổi dấu một hạng tử trong một bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$\Leftrightarrow 6x - 4x \leq 2 + 3 \text{ (chuyển vế, đổi dấu)}$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 5 \text{ (rút gọn từng vế của bất phương trình)}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} \text{ (chia cả hai vế cho } 2 > 0 \text{)}.$$

Biểu diễn trên trục số các tập nghiệm của các bất phương trình:



Giao của hai tập hợp trên là đoạn $\left[\frac{7}{10}; \frac{5}{2}\right]$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là đoạn $\left[\frac{7}{10}; \frac{5}{2}\right]$.

Ta viết ngắn gọn như sau:

$$\begin{cases} 3x + \frac{3}{5} \geq x + 2 \\ \frac{6x - 3}{2} \leq 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq \frac{7}{5} \\ 6x - 3 \leq 4x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{10} \\ 2x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{10} \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{10} \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

Đáp án C.

Lưu ý:

- Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình thì điều kiện của bất phương trình có thể bị thay đổi. Vì vậy để tìm nghiệm của một bất phương trình ta phải tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.
- Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình $f(x) < g(x)$ với biểu thức $h(x)$ ta cần lưu ý đến điều kiện về dấu của $h(x)$. Nếu $h(x)$ nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm thì ta phải lần lượt xét từng trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến một hệ bất phương trình.
- Khi giải bất phương trình $f(x) < g(x)$ mà phải bình phương hai vế thì ta lần lượt xét hai trường hợp:
 - + $f(x), g(x)$ cùng có giá trị không âm, ta bình phương hai vế bất phương trình.
 - + $f(x), g(x)$ cùng có giá trị âm, ta viết: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow -f(x) > -g(x)$ rồi bình phương hai vế bất phương trình mới (sau khi bình phương thì bất phương trình đổi chiều).

Ví dụ 4: Bất phương trình $x - 1 > 0$ (*) tương đương với bao nhiêu bất phương trình cho dưới đây?

(I) $x - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} > \frac{1}{x^2 + 1};$

(II) $x - 1 + \sqrt{x - 2} > \sqrt{x - 2};$

(III) $x - 1 + \frac{1}{x + 3} > \frac{1}{x + 3};$

(IV) $x - 1 + \frac{1}{(x - 4)^2} > \frac{1}{(x - 4)^2}.$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có (*) xác định trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

+ Xét bất phương trình (I):

Cộng cả 2 vế của (*) với $\frac{1}{x^2 + 1}$ ta được bất phương trình (I). Mà hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

xác định trên $\mathbb{R}$ nên suy ra (*) tương đương với (I).

+ Xét bất phương trình (II): Cộng cả 2 vế của (*) với $\sqrt{x - 2}$ ta được bất phương trình (II). Tuy nhiên hàm số $y = \sqrt{x - 2}$ xác định trên $[2; +\infty)$ nên ta chưa thể khẳng định được ngay (*) có tương đương với (II) hay không.

Ta có:

$$x - 1 + \sqrt{x - 2} > \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 1 + \sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Vậy (*) không tương đương với (II).

+ Xét bất phương trình (III): Tương tự như trên, ta chưa thể khẳng định ngay được là (*) có tương đương với (III) không.

$$\text{Ta có: } x - 1 + \frac{1}{x + 3} > \frac{1}{x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \neq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy (*) tương đương với (III).

+ Xét bất phương trình (IV): Tương tự, ta có:

$$x - 1 + \frac{1}{(x - 4)^2} > \frac{1}{(x - 4)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \neq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x > 1 \end{cases}.$$

Vậy (*) không tương đương với (IV).

+ Tóm lại (*) tương đương với hai bất phương trình (I) và (III).

Đáp án B.

Ví dụ 5: Bất phương trình $2x - 1 > x$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

A. $(2x - 1)^2 > x^2$.

B. $(2x - 1)(x - 5) > x(x - 5)$.

C. $\frac{2x - 1}{x^2 + 3} > \frac{x}{x^2 + 3}$.

D. $\frac{1}{2x - 1} < \frac{1}{x}$.

Lời giải

- Với đáp án A: $2x - 1$ và x là các biểu thức nhận cả giá trị âm và giá trị dương trên $\mathbb{R}$ nên khi bình phương hai vế, bất phương trình mới thu được không tương đương.

- Với đáp án B: Vì $x - 5$ là biểu thức nhận cả giá trị âm và giá trị dương trên $\mathbb{R}$ nên khi nhân cả hai vế của bất phương trình ban đầu với $x - 5$ ta được bất phương trình không tương đương.

- Với đáp án C: $x^2 + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên chia cả hai vế của bất phương trình $2x - 1 > x$ cho $x^2 + 3$ ta được bất phương trình tương đương. Vậy C là đáp án đúng.

- Với đáp án D: Vì $2x - 1$ và x là các biểu thức nhận cả giá trị âm và giá trị dương trên $\mathbb{R}$ nên khi nghịch đảo (dù có cả đổi chiều) ta không thu được bất phương trình tương đương.

Đáp án C.

STUDY TIP

Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà **không làm thay đổi** điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

STUDY TIP

Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà **làm thay đổi** điều kiện của bất phương trình thì ta chưa thể khẳng định ngay là bất phương trình mới thu được có tương đương với bất phương trình đã cho hay không.

STUDY TIP

Nếu hai vế của một bất phương trình đều dương trên D thì khi nghịch đảo hai vế và đổi chiều ta được bất phương trình tương đương trên D .

II. Dấu của nhị thức bậc nhất

Định nghĩa:

Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$, trong đó a, b là các hệ số, $a \neq 0$.

Định lí:

Nhị thức $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) có giá trị: - Cùng dấu với a khi $x > -\frac{b}{a}$;
- Trái dấu với a khi $x < -\frac{b}{a}$.

Bảng tóm tắt về dấu của $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$):

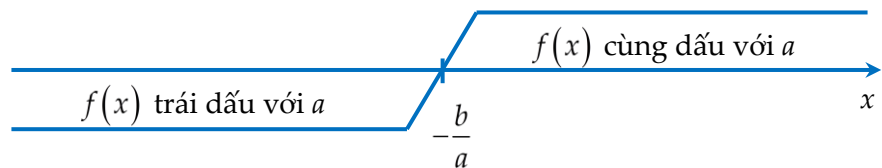
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

STUDY TIP

Cách ghi nhớ: “trái khác, phải cùng”

Ta có $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$. Ta nói số $x_0 = -\frac{b}{a}$ là nghiệm của nhị thức $f(x)$.

Nghiệm $x_0 = -\frac{b}{a}$ chia trục số thành hai khoảng mà trên đó dấu của nhị thức là trái nhau.



STUDY TIP

Dấu của nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ phụ thuộc vào dấu của hệ số a .

Một số kết quả quan trọng:

Xét nhị thức $f(x) = ax + b$:

$$+ f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases}; f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}.$$

$$+ f(x) \geq 0 \forall x \geq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ f(\alpha) \geq 0 \end{cases}; f(x) \leq 0 \forall x \geq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ f(\alpha) \leq 0 \end{cases}.$$

$$+ f(x) \geq 0 \forall x \leq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ f(\alpha) \geq 0 \end{cases}; f(x) \leq 0 \forall x \leq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ f(\alpha) \leq 0 \end{cases}.$$

$$+ f(x) \geq 0 \forall x \in [\alpha; \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq 0 \\ f(\beta) \geq 0 \end{cases}; f(x) \leq 0 \forall x \in [\alpha; \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 0 \\ f(\beta) \leq 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 6: Cho nhị thức $f(x) = (m-1)x + 3 - m$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) \geq 0 \forall x < -1$;

b) $f(x) \leq 0 \forall x \geq 2$;

d) $f(x) \leq 0 \forall x \in (0; 5)$.

Lời giải

a) $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ 3-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) \leq 0 \forall x \geq 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1. \\ \text{c) } f(x) \geq 0 \forall x < -1 &\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 0 \\ f(-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ -2m+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1. \\ \text{d) } f(x) \leq 0 \forall x \in (0; 5) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m \leq 0 \\ 4m-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset. \end{aligned}$$

III. Dấu của tam thức bậc hai. Bất phương trình bậc hai

1. Dấu của tam thức bậc hai

- Định nghĩa:

Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các hệ số; $a \neq 0$.

- Định lý: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với a , tức là $\forall x \in \mathbb{R} : af(x) > 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu với a	
$af(x)$	+	

Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với a trừ khi $x = -\frac{b}{a}$, tức là $\forall x \neq -\frac{b}{a}$:

$af(x) > 0$ (hay $\forall x \in \mathbb{R} : af(x) \geq 0$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$).

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu với a	0	cùng dấu với a
$af(x)$	+	0	+

Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$, trái dấu với a khi $x_1 < x < x_2$, trong đó x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của $f(x)$, tức là:

$$af(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2;$$

$$af(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases}.$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a
$af(x)$	+	0	-	0	+

Lưu ý: Ta có thể dùng $\Delta' = b'^2 - ac$ thay cho Δ .

* Một số kết quả quan trọng:

$$+ ax^2 + bx + c > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases};$$

STUDY TIP

Dấu của tam thức bậc hai phụ thuộc vào dấu của Δ và dấu của hệ số a .

STUDY TIP

Quy tắc xét dấu của tam thức bậc hai khi $\Delta > 0$: “trong trái, ngoài cùng”.

$$\begin{aligned}
 &+ ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}; \\
 &+ ax^2 + bx + c < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}; \\
 &+ ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 7: Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = x^2 + x + 1$;

b) $g(x) = -x^2 + 3x - 2$.

Lời giải

a) $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ mà $a = 1 > 0$. Vậy $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x)$ có 2 nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$, $a = -1 < 0$.

Bảng xét dấu $g(x)$:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$g(x)$	-	0	+	0	-

Ví dụ 8: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = \sqrt{mx^2 - 2(2m-1)x + 4m}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi S chứa khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2; 0)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(2; 4)$.

D. $(0; 4)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow mx^2 - 2(2m-1)x + 4m \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

- TH1: $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -2(2m-1) = 0 \\ 4m \geq 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

- TH2: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}$.

Vậy $S = \left[\frac{1}{4}; +\infty \right)$. Do đó S chứa khoảng $(2; 4)$.

Đáp án C.

2. Bất phương trình bậc hai

- Định nghĩa:

Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$) trong đó a, b, c là các hệ số, $a \neq 0$.

- Các bước giải bất phương trình bậc hai:

+ Xét dấu biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.

+ Dựa vào kết quả xét dấu để kết luận về nghiệm của bất phương trình.

STUDY TIP

Khi xét dấu tam thức bậc hai mà hệ số a chứa tham số, ta lưu ý trường hợp $a = 0$.

Ví dụ 9: Tập nghiệm S của bất phương trình $2x^2 - x - 1 < 0$ là:

A. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

B. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

C. $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

D. $S = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Lời giải

$f(x) = 2x^2 - x - 1$ có hai nghiệm là 1 và $-\frac{1}{2}$, có $a = 2 > 0$.

Bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$	
$f(x)$		+	0	-	0	+

Vậy $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. Do đó $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Đáp án C.

IV. Bất phương trình tích, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Xét dấu biểu thức có dạng tích, thương các đa thức

* Xét biểu thức $P(x)$ có dạng tích các đa thức:

- **Cách 1:** Xét dấu $P(x)$ bằng phương pháp lập bảng xét dấu (độc giả đọc trong Sách giáo khoa Đại số 10).

- **Cách 2:** Xét dấu $P(x)$ bằng phương pháp khoảng.

+ **Bước 1:** Giải phương trình $P(x) = 0$ được các nghiệm $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

+ **Bước 2:** Đặt các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ lên trục số. Các điểm này chia trục số thành $n+1$ khoảng.

+ **Bước 3:** Xác định dấu của $P(x)$ trên một trong các khoảng nói trên (dấu của $P(x)$ trùng với dấu của $P(a)$ với a là một điểm tùy ý thuộc khoảng đó).

+ **Bước 4:** Suy ra dấu của $P(x)$ trên các khoảng còn lại theo quy tắc: “qua” nghiệm bội lẻ thì $P(x)$ đổi dấu, “qua” nghiệm bội chẵn thì $P(x)$ không đổi dấu.

Ví dụ 10: Xét dấu biểu thức $P(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$.

Lời giải

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 2 \text{ hoặc } x = 3.$$

Trong đó $x = 1$ và $x = 3$ là các nghiệm bội lẻ, $x = 2$ là nghiệm bội chẵn.

Ta có $P(0) = (-1) \cdot (-2)^2 \cdot (-3)^3 > 0$. Từ đó ta có kết quả xét dấu $P(x)$:

x	$-\infty$	1		2		3		$+\infty$
$P(x)$	+	0	-	0	-	0	+	

STUDY TIP

Có thể sử dụng chức năng giải bất phương trình bậc hai của máy tính cầm tay!

STUDY TIP

Ở bước 3, ta thường chọn khoảng chứa số 0 (nếu 0 không phải là một trong các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$) rồi chọn $a = 0$.

* Xét biểu thức $P(x)$ có dạng thương các đa thức: $P(x) = \frac{R(x)}{S(x)}$.

Giải phương trình $R(x)=0$ và $S(x)=0$ được các nghiệm $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Các nghiệm này chia trục số thành $n+1$ khoảng.

Ta có một kết quả quan trọng: Dấu của phân thức $\frac{R(x)}{S(x)}$ trùng với dấu của tích $R(x).S(x)$ trên các khoảng đó.

Ta tìm hiểu cụ thể qua ví dụ sau:

Ví dụ 11: Xét dấu biểu thức $P(x) = \frac{(x-1)(x^2-3x+2)}{(x-2)^2(x^2-7x+12)}$.

Lời giải

- Giải phương trình $(x-1)(x^2-3x+2)=0$ được các nghiệm: $x=1$ (bội 2) và $x=2$ (bội 1).

- Giải phương trình $(x-2)^2(x^2-7x+12)=0$ được các nghiệm: $x=2$ (bội 2), $x=3$ (bội 1) và $x=4$ (bội 1).

Vậy ta có thể coi $x=1$ là nghiệm bội 2, $x=2$ là “nghiệm” bội 3, $x=3$ và $x=4$ là các “nghiệm” bội 1 của $P(x)$.

$$P(0) = \frac{-1.2}{(-2)^2.12} < 0.$$

Từ đó ta có kết quả xét dấu $P(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$P(x)$	-	0	-	+	-	+

LƯU Ý

Tại các điểm 2, 3, 4: $P(x)$ không xác định.

2. Áp dụng giải bất phương trình tích, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

Ví dụ 12: Cho phương trình $(4x-1)(x+2)(5-3x) \leq 0$. Số nghiệm nguyên trong đoạn $[0; 2018]$ của bất phương trình là:

A. 1.

B. 2018.

C. 2019.

D. 0.

Lời giải

Ta có $(4x-1)(x+2)(5-3x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}; x=-2$ hoặc $x=\frac{5}{3}$.

Kết quả xét dấu của biểu thức $P(x)=(4x-1)(x+2)(5-3x)$:

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$P(x)$	+	0	-	0	+

Vậy $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-2; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Do đó các nghiệm nguyên của bất phương trình $P(x) \leq 0$ trong đoạn $[0; 2018]$ là $0; 2; 3; \dots; 2018 \Rightarrow$ Có 2018 số.

Đáp án B.

STUDY TIP

Với bất phương trình chứa ẩn ở mẫu, không được tùy tiện quy đồng khử mẫu khi chưa xác định được dấu của các biểu thức trong bất phương trình.

Ví dụ 13: Bất phương trình $\frac{2x-5}{3x+2} > \frac{3x+2}{2x-5}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên âm?

A. 0.

B. 7.

C. 6.

D. Vô số.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -\frac{2}{3}$ và $x \neq \frac{5}{2}$.

$$\frac{2x-5}{3x+2} > \frac{3x+2}{2x-5} \Leftrightarrow \frac{2x-5}{3x+2} - \frac{3x+2}{2x-5} > 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-5)^2 - (3x+2)^2}{(3x+2)(2x-5)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(5x-3)(x+7)}{(3x+2)(2x-5)} < 0$$

Kết quả xét dấu về trái:

x	$-\infty$	-7	$-2/3$	$3/5$	$5/2$	$+\infty$
VT	+	0	-	+	0	-

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \in \left(-7; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; \frac{5}{2}\right)$.

Suy ra bất phương trình đã cho có 6 nghiệm nguyên âm là $-6; -5; -4; -3; -2; -1$.

Đáp án C.

V. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Một số kết quả quan trọng thường sử dụng:

1. $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases};$

2. $|f(x)|^2 = f^2(x);$

3. Với $a > 0$ thì:

+ $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a;$

+ $|f(x)| > a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases};$



4. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các biểu thức của x :

+ $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow [f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] < 0;$

+ $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x);$

+ $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}.$

Ví dụ 14: Biết tập nghiệm của bất phương trình $|2x-1| \leq x+2$ là đoạn $[a; b]$.

Tính $b-a$.

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. 4.

D. $\frac{10}{3}$.

Lời giải

$$|2x-1| \leq x+2 \Leftrightarrow -(x+2) \leq 2x-1 \leq x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 3x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 3.$$

Vậy $a = -\frac{1}{3}, b = 3 \Rightarrow b-a = 3 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}.$

Đáp án D.

STUDY TIP

Giá trị tuyệt đối của một số là khoảng cách từ số đó đến số 0 trên trục số.

Ví dụ 15: Có bao nhiêu số tự nhiên khác 0 thuộc tập nghiệm của bất phương

trình: $\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geq 1 \quad (1)?$

A. 0.

B. 2.

C. 5.

D. Vô số.

Lời giải

Lập bảng chia khoảng xét dấu hai biểu thức $x^2 - 4x$ và $x - 5$:

x	$-\infty$	0	4	5	$+\infty$
$x^2 - 4x$	+	0	-	0	+
$x - 5$	-	-	-	0	+

- **TH1:** Với $x \leq 0$ hoặc $4 < x \leq 5$, bất phương trình (1) trở thành:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x + 5} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq x^2 - x + 5 \quad (\text{do } x^2 - x + 5 > 0 \forall x)$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{3}.$$

Vậy trong trường hợp này bất phương trình đã cho có nghiệm là $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$.

- **TH2:** Với $0 < x \leq 4$, bất phương trình (1) trở thành:

$$\frac{-x^2 + 4x + 3}{x^2 - x + 5} \geq 1 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 3 \geq x^2 - x + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$

Vậy trong trường hợp này bất phương trình đã cho có nghiệm là $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- **TH3:** Với $x > 5$, bất phương trình (1) trở thành:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 5} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq x^2 + x - 5 \quad (\text{do với } x > 5 \text{ thì } x^2 - x + 5 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 5x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{5} \quad (\text{loại}).$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Do đó 2 số tự nhiên khác 0 thuộc tập nghiệm của bất phương trình đã cho.

Đáp án B.

VI. Bất phương trình chứa căn thức

(Trong chương trình chuẩn không có nội dung bất phương trình chứa căn thức. Vì vậy phần này chỉ mang tính chất tham khảo).

* Một số kết quả quan trọng:

$$+ \sqrt{A} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow A \geq 0;$$

$$+ \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases};$$

$$+ \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases};$$

STUDY TIP

Ta thường sử dụng phương pháp chia khoảng xét dấu khi bất phương trình chứa ẩn dưới dấu giá trị tuyệt đối nhưng không được đưa về các dạng cơ bản như trong mục 3, 4 ở trên.

$$+ \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}.$$

Ví dụ 16: Bất phương trình $\sqrt{2x^2 - 6x + 1} < x - 2$ có tập nghiệm là nửa khoảng $[a; b)$. Tính $2a + b$.

A. $6 + \sqrt{7}$.

B. $\frac{9 + \sqrt{7}}{2}$.

C. $5 + \sqrt{7}$.

D. 6.

Lời giải

$$\sqrt{2x^2 - 6x + 1} < x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 & (1) \\ 2x^2 - 6x + 1 \geq 0 & (2) \\ 2x^2 - 6x + 1 < (x - 2)^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x > 2.$$

$$(2) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{7}}{2}; +\infty\right).$$

$$(3) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 3).$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là } S = \left[\frac{3 + \sqrt{7}}{2}; 3\right).$$

$$\text{Do đó } 2a + b = 6 + \sqrt{7}.$$

Đáp án A.

B. Các dạng toán điển hình

Dạng 1

Bài tập về phép biến đổi tương đương

Ví dụ 1: Tập nghiệm của bất phương trình $x + \sqrt{x+2} \leq 2 + \sqrt{x+2}$ là:

- A. $(-\infty; -2)$. B. $\{2\}$. C. $[-2; 2]$. D. $\emptyset$.

STUDY TIP

Cần lưu ý đến điều kiện xác định khi giải bất phương trình chứa căn thức.

Lời giải

Điều kiện: $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Ta có: $x + \sqrt{x+2} \leq 2 + \sqrt{x+2} \Rightarrow x \leq 2$.

(Lưu ý: Ta nói $x \leq 2$ là hệ quả của bất phương trình $x + \sqrt{x+2} \leq 2 + \sqrt{x+2}$)

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $-2 \leq x \leq 2$.

Đáp án C.

Ví dụ 2: Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $x+3 > 0$?

- A. $(x+3)\sqrt{x+4} > 0$. B. $x+3+\sqrt{1-x} > \sqrt{1-x}$.
C. $(x-5)^2(x+3) > 0$. D. $x^2(x+3) > 0$.

Lời giải

Ta có: $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

Với A: $(x+3)\sqrt{x+4} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > -3$.

Vậy bất phương trình $(x+3)\sqrt{x+4} > 0$ và bất phương trình $x+3 > 0$ có cùng tập nghiệm, do đó tương đương với nhau. A là đáp án đúng.

Giải thích thêm:

$$* x+3+\sqrt{1-x} > \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x \leq 1.$$

Vậy bất phương trình $x+3+\sqrt{1-x} > \sqrt{1-x}$ và bất phương trình $x+3 > 0$ không có cùng tập nghiệm. Do đó chúng không tương đương với nhau.

$$* (x-5)^2(x+3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x > -3 \end{cases}.$$

Tương tự suy ra C không phải là đáp án đúng.

$$* x^2(x+3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -3 \end{cases}.$$

Do đó D cũng không phải là đáp án đúng.

Đáp án A.

Dạng 2

Giải bất phương trình, hệ bất phương trình

Ví dụ 3: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{x-2018} > \sqrt{2018-x}$?

- A. $S = \{2018\}$. B. $S = \emptyset$.
C. $S = (-\infty; 2018)$. D. $S = (2018; +\infty)$.

Lời giải

STUDY TIP

Cần lưu ý đến điều kiện xác định khi giải bất phương trình.

LƯU Ý

Lời giải sai: Bất phương trình tương đương với $x^2 \leq 4x - 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 2$.

STUDY TIP

Không được tùy tiện chia 2 vế của bất phương trình cho một biểu thức khi chưa xác định được dấu của biểu thức đó.

LƯU Ý

Lời giải sai: Bất phương trình tương đương với $x^2 - x - 10 \geq 2x^2 + 4x - 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; -1]$.

STUDY TIP

Không được tùy tiện quy đồng khử mẫu khi giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x - 2018 \geq 0 \\ 2018 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2018 \\ x \leq 2018 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2018.$$

Dễ thấy $x = 2018$ không thỏa mãn bất phương trình đã cho.
Vậy $S = \emptyset$.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Cho bất phương trình $x^2(x-1)(x^2-4) \leq (x-1)(x^2-4)(4x-4)$ có tập nghiệm S . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. S có 3 nghiệm nguyên không âm.
- B. S có 1 nghiệm duy nhất.
- C. Số $x_0 = 1$ là phần tử có giá trị tuyệt đối nhỏ nhất của S .
- D. S chứa khoảng $(3; 4)$.

Lời giải

$$x^2(x-1)(x^2-4) \leq (x-1)(x^2-4)(4x-4) \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4)(x^2-4x+4) \leq 0.$$

Ta có $(x-1)(x^2-4)(x^2-4x+4) = 0$ có các nghiệm $x = 1$ (bội 1), $x = 2$ (bội 3) và $x = -2$ (bội 1). Xét dấu vế trái:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
VT	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy $S = (-\infty; -2] \cup [1; 2]$. Do đó C là đáp án đúng.

Đáp án C.

Ví dụ 5: Gọi M, m lần lượt là nghiệm nguyên lớn nhất và nhỏ nhất của bất phương trình $\frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 2x - 3} \geq 2$. Tính $M + m$.

- A. -5.
- B. -4.
- C. -3.
- D. -2.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 + 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq -3$.

$$\frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 2x - 3} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 2x - 3} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 5x - 4}{x^2 + 2x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 2x - 3} \leq 0.$$

Bảng xét dấu vế trái:

x	$-\infty$	-4			-3	-1			1	$+\infty$
VT		+	0	-		+	0	-		+

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x \in [-4; -3) \cup [-1; 1)$.

Do đó $M = 0$ và $m = -4 \Rightarrow M + m = -4$.

Đáp án B.

Ví dụ 6: Bất phương trình $4x^2 + 4x - 5 \leq |2x + 1|$ có tập nghiệm $S = [a; b]$ ($a < b$). Tính $a^2 + b^2$.

- A. $a^2 + b^2 = \frac{17}{4}$.
- B. $a^2 + b^2 = \frac{5}{2}$.
- C. $a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$.
- D. $a^2 + b^2 = 5$.

Lời giải

$$\begin{cases} |2x+1| \geq 4x^2 + 4x - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 4x^2 + 4x - 5 & (1) \\ 2x+1 \leq -4x^2 - 4x + 5 & (2) \end{cases} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq 1.$$

$$(2) \Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left[-\frac{3}{2}; 1\right] \cup \left[-2; \frac{1}{2}\right] = [-2; 1]$.

Do đó $a^2 + b^2 = 5$.

Đáp án D.

Ví dụ 7: Biết tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2x \geq 3$ là nửa khoảng $[a; +\infty)$. Tìm $[a]$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2x \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \leq 0 & (I) \\ x^2 - 4x + 5 \geq 0 & (II) \end{cases} \end{cases}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}.$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 3x^2 - 8x + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

Từ đó ta có $a = \frac{2}{3} \Rightarrow [a] = 0$.

Đáp án A.

Ví dụ 8: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0 \\ |x^2 - 4x| \leq 0 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$* x^2 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 6 \quad (*).$$

$$* |x^2 - 4x| \leq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4x| = 0 \quad (\text{do } |x^2 - 4x| \geq 0 \forall x)$$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$, trong hai giá trị này của x chỉ có giá trị $x = 4$ thỏa mãn (*).

Vậy hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4$.

Đáp án B.

STUDY TIP

Phần nguyên của một số thực x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , kí hiệu $[x]$. Ví dụ:

$$[2,5] = 2; [-2,5] = -3.$$

STUDY TIP

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D . Khi đó $|f(x)| \geq 0, \forall x \in D$.

Dạng 3

Bất phương trình, hệ bất phương trình bậc nhất chứa tham số

Ví dụ 9: Số giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $m^2(x-1) + x - 3 < 0$ nghiệm đúng $\forall x \in [-5; 2]$ là:

A. Vô số.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

$$m^2(x-1) + x - 3 < 0 \Leftrightarrow (m^2 + 1)x - m^2 - 3 < 0.$$

$$\text{Đặt } f(x) = (m^2 + 1)x - m^2 - 3.$$

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in [-5; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} f(-5) < 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m^2 - 8 < 0 \\ m^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6m^2 + 8 > 0 \\ m^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow |m| < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Vậy có duy nhất 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán, đó là giá trị $m = 0$.

Đáp án B.

Ví dụ 10: Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3(x-6) < -3 \\ \frac{5x+m}{2} > 7 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m \leq -11$.

B. $m \geq -11$.

C. $m < -11$.

D. $m > -11$.

Lời giải

$$* 3(x-6) < -3 \Leftrightarrow x-6 < -1 \Leftrightarrow x < 5.$$

$$* \frac{5x+m}{2} > 7 \Leftrightarrow 5x+m > 14 \Leftrightarrow x > \frac{14-m}{5}.$$

Vậy hệ bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{14-m}{5} < 5 \Leftrightarrow 14-m < 25 \Leftrightarrow m > -11.$$

Đáp án D.

Dạng 4

Tam thức bậc hai, bất phương trình bậc hai chứa tham số

Ví dụ 11: Cho bất phương trình $f(x) = 3x^2 + 2(2m-1)x + m + 4 \leq 0$, trong đó m là tham số, $m \in \mathbb{Z}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của m để bất phương trình vô nghiệm?

A. Vô số.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Bất phương trình $f(x) \leq 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 7m - 11 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{11}{4}.$$

$$\text{Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}.$$

Đáp án C.

STUDY TIP

$$f(x) = ax + b < 0 \quad \forall x \in [\alpha; \beta]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) < 0 \\ f(\beta) < 0 \end{cases}.$$

LƯU Ý

Hệ bất phương trình trong Ví dụ 10 vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{14-m}{5} \geq 5 \Leftrightarrow m \leq -11.$$

Ví dụ 12: Cho bất phương trình $f(x) = mx^2 + (2m-1)x + m+1 < 0$ (m là tham số). Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để bất phương trình có nghiệm. S chứa khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-1; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(2; 3)$.

Lời giải

Ta tìm điều kiện của m để bất phương trình $f(x) < 0$ vô nghiệm.

- TH1: $m=0$. Khi đó $f(x) = -x+1 < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy với $m=0$ thì bất phương trình $f(x) < 0$ có nghiệm.

- TH2: $m \neq 0$. Khi đó bất phương trình $f(x) < 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1-8m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \geq \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{8}.$$

Vậy $m \geq \frac{1}{8}$ thì bất phương trình $f(x) < 0$ vô nghiệm.

Suy ra với $m < \frac{1}{8}$ thì bất phương trình $f(x) < 0$ có nghiệm $\Rightarrow S = \left(-\infty; \frac{1}{8}\right)$.

Vậy S chứa khoảng $(-1; 0)$.

Đáp án A.

Ví dụ 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1} \leq 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in (-2; 2)$.
C. $m \in [-2; 2]$. D. $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $f(x) = -x^2+2x-5$ có $\Delta' < 0, a < 0$ nên $f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } \frac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1} \leq 0 \Leftrightarrow x^2-mx+1 > 0.$$

$$\Rightarrow \text{Bất phương trình } \frac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1} \leq 0 \text{ nghiệm đúng } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-mx+1 > 0$$

$$\text{nghiệm đúng } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Đáp án B.

LƯU Ý

Việc xác định chính xác dấu của tử thức $-x^2+2x-5$ giúp ta có được lời giải đơn giản cho bài toán này.

Dạng 5

Biện luận về nghiệm của phương trình bậc hai

Ví dụ 14: Cho phương trình $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$. Biết tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình vô nghiệm là khoảng $(a; b)$. Tính $b-a$.

A. $b-a=8$. B. $b-a=6$. C. $b-a=-8$. D. $b-a=-6$.

Lời giải

$$* \text{ TH1: } m+2=0 \Leftrightarrow m=-2. \text{ Phương trình đã cho trở thành: } 6x+4=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}.$$

$$* \text{ TH2: } m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2. \text{ Khi đó phương trình đã cho có nghiệm}$$

LƯU Ý

Khi phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ có hệ số a chứa tham số ta cần phải chú ý đến trường hợp $a = 0$.

STUDY TIP

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac < 0$.

STUDY TIP

Độ dài của đoạn $[a; b]$ trên trục số là $b - a$.

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 6m - 7 < 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 7).$$

Vậy với $m \in (-1; 7)$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

$$\text{Do đó } b - a = 7 - (-1) = 8.$$

Đáp án A.

Ví dụ 15: Gọi m_0 là giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tham số m để phương trình $-2x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 5m + 6 = 0$ có hai nghiệm trái dấu. Khi đó số ước nguyên dương của m_0 là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Phương trình đã cho có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow -2(m^2 - 5m + 6) < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty).$$

Vậy $m_0 = 1$. Do đó m_0 có 1 ước nguyên dương.

Đáp án A.

Ví dụ 16: Cho phương trình $x^2 + 2(m-1)x + 4m + 8 = 0$. Biết tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tìm độ dài của đoạn $[a; b]$ trên trục số.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 6

Lời giải

Phương trình đã cho có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 7 > 0 \\ -2(m-1) > 0 \\ 4m + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty) \\ m < 1 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2; -1).$$

Vậy đoạn $[a; b]$ có độ dài là $-1 - (-2) = 1$.

Đáp án A.

Lưu ý:

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$, $S = \frac{-b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$.

+ Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

+ Phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

+ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

+ Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$ ($\Leftrightarrow ac < 0$).

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Xem đáp án chi tiết tại trang 228

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình $mx + m < 2x$ vô nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên nhỏ hơn 10 thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{2x+3} \geq \frac{1}{5-x}$?

- A. Vô số. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 3: Nếu $|m| < 1$ thì tập nghiệm của bất phương trình ẩn x , tham số m : $2(m+1)x < (m+1)^2(x-1)$ là:

- A. $\left(-\infty; \frac{m+1}{m-1}\right)$. B. $\left(\frac{m+1}{m-1}; +\infty\right)$.
C. $\left(-\infty; \frac{m-1}{m+1}\right)$. D. $\left(\frac{m-1}{m+1}; +\infty\right)$.

Câu 4: Cho phương trình:

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0.$$

Gọi a và b lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của tham số m để phương trình có nghiệm. Tính $a+b$.

- A. -4. B. 4. C. -2. D. 2.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{\sqrt{(5m-m^2-4)x^2 - (m-4)x - 1}}$.

Tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ là:

- A. $\left[1; \frac{4}{3}\right]$. B. $\left(1; \frac{4}{3}\right)$.
C. $(1; 4)$. D. $\emptyset$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình

$$(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 0 \text{ là:}$$

- A. $S = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
B. $S = (-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [4; +\infty)$.
D. $S = (-\infty; -3] \cup [3; 4) \cup (4; +\infty)$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình:

$$x + \sqrt{x-2} < 2 + \sqrt{x-2} \text{ là:}$$

- A. $\emptyset$. B. $\{2\}$.
C. $(-\infty; 2)$. D. $[2; +\infty)$.

Câu 8: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x^2 \leq 3x \Leftrightarrow x \leq 3$.

B. $\frac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$.

C. $(x-1)\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0$.

D. $x + \sqrt{x-1} < 2 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x < 2$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x-m}} + \sqrt{2m+6-x}$ xác định trên khoảng $(-1; 0)$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\forall x \in \mathbb{R}$ ta luôn có $-2 \leq \frac{x^2 + 2x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 3$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình:

$$|x+2| + \sqrt{x^2 - 4x + 4} < 4 \text{ là:}$$

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 2)$.
C. $(2; +\infty)$. D. $\emptyset$.

Câu 12: Gọi M là số dương nhỏ nhất và m là số âm lớn nhất thuộc tập xác định của hàm số:

$$y = \sqrt{x^2 + x - 3} - (x+6).$$

Tính $M+m$.

- A. 4. B. -2. C. 2. D. 0.

Câu 13: Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + 4m^2 \leq 2mx + 1 \\ 3x + 2 > 2x - 1 \end{cases}$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ của tham số m để hệ vô nghiệm?

- A. 8. B. 7. C. 10. D. 19.

Câu 14: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - 2mx + 5m - 8 \leq 0$ có tập nghiệm là một đoạn có độ dài bằng 4 trên trục số. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng:

- A. -5. B. 1. C. 5. D. 8.

Câu 15: Biết bất phương trình

$$2x^2 - 4x - 9 + \sqrt{5x+6} + \sqrt{7x+11} \leq 0$$

có tập nghiệm $S = [a; b]$. Tính $a+b$.

- A. $\frac{4}{5}$. B. 3. C. 1. D. -1.

BÀI KIỂM TRA CHỦ ĐỀ V

Xem đáp án chi tiết tại trang 230

Câu 1: Bất phương trình nào sau đây **không** tương đương với bất phương trình $x + 2018 \geq 0$?

- A. $(x-1)^2(x+2018) \geq 0$.
 B. $-x^2(x+2018) \leq 0$.
 C. $\sqrt{x+2018}(x+2018) \geq 0$.
 D. $(x+2018)\sqrt{x+2019} \geq 0$.

Câu 2: Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $x^2 < 3x \Leftrightarrow x < 3$.
 B. $\frac{x+1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0$.
 C. $x + \sqrt{3-x} > 2 + \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x > 2$.
 D. $(x-1)\sqrt{x+2} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0$.

Câu 3: Cho bất phương trình $\frac{7}{2-x} > 1$. Một học sinh giải như sau:

$$\begin{aligned} \frac{7}{2-x} > 1 &\stackrel{(I)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2-x} > \frac{1}{7} \stackrel{(II)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \neq 2 \\ 2-x < 7 \end{cases} \\ &\stackrel{(III)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \neq 2 \\ x > 5 \end{cases} \stackrel{(IV)}{\Leftrightarrow} x > 5. \end{aligned}$$

Hỏi học sinh giải sai từ bước nào?

- A. (I). B. (II). C. (III). D. (IV).

Câu 4: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình:

$$|x^2 - 3x + 2| < 0.$$

- A. $S = (1; 2)$. B. $S = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
 C. $S = \emptyset$. D. $S = \{1; 2\}$.

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình: $x(x-1)^2 \geq 4-x$ chứa khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(0; 3)$.

Câu 6: Tập nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3} < -x+1 \\ \frac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases} \text{ chứa bao nhiêu số nguyên?}$$

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 7: Cặp bất phương trình nào sau đây **không** tương đương?

- A. $\sqrt{x-2} \geq x$ và $(2x+1)\sqrt{x-2} \geq x(2x+1)$.

B. $2x-1 + \frac{1}{x-5} < \frac{1}{x-5}$ và $2x-1 < 0$.

C. $x^2(x+5) < 0$ và $x+5 < 0$.

D. $x^4(x+5) > 0$ và $x+5 > 0$.

Câu 8: Điều kiện của bất phương trình:

$$\sqrt[3]{x+2} + \sqrt{x+3} + \frac{1}{x-1} < 5x+2 \text{ là:}$$

- A. $x \geq -2$. B. $x \geq -3$.
 C. $x \geq -2$ và $x \neq 1$. D. $x \geq -3$ và $x \neq 1$.

Câu 9: Bất phương trình $|x^2 - 4| \geq x^2 - 4$ có tập nghiệm là:

- A. $S = (-\infty; +\infty)$. B. $S = \{\pm 2\}$.
 C. $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $S = [-2; 2]$.

Câu 10: Gọi a và b lần lượt là nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{cases} \text{ . Tính } a+b.$$

- A. 3. B. 2. C. 6. D. 10.

Câu 11: Bất phương trình $|5x-4|(2x^2-3x+2) \geq 0$ có tập nghiệm là:

- A. $S = \left[\frac{4}{5}; +\infty\right)$. B. $S = \left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$.
 C. $S = (-\infty; +\infty)$. D. $S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$.

Câu 12: Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Bất phương trình $ax+b < 0$ luôn có nghiệm $\forall a, b$.
 B. Bất phương trình $ax+b < 0$ vô nghiệm khi $a=0$ và $b \geq 0$.
 C. Bất phương trình $ax+b < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $a=0$ và $b < 0$.
 D. Bất phương trình $ax+b < 0$ có nghiệm khi $a \neq 0$.

Câu 13: Có bao nhiêu số nguyên **không** thuộc tập nghiệm của bất phương trình $|x+1| + |x-4| > 7$?

- A. 6. B. 8. C. 4. D. 2.

Câu 14: Cho bất phương trình $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \geq 1$. Nghiệm lớn nhất của bất phương trình gần với số nào nhất trong các số sau?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 15: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx + 3m > 0 \\ 5 - 3x < 2x + 3 \end{cases}$.

Xét các khẳng định sau:

(I) Khi $m < 0$ thì hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

(II) Khi $m = 0$ thì hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(III) Khi $m > 0$ thì hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

(IV) $\forall m$ thì hệ bất phương trình đã cho có nghiệm là $\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 16: Giá trị lớn nhất của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} -x^2 + x + 12 > 0 \\ x < m - 1 \end{cases}$ vô nghiệm là:

- A. -4. B. -3. C. -2. D. -1.

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x-1|}{x+2} < 1$ là:

- A. $S = (-1; +\infty)$.
B. $S = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
C. $S = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.
D. $S = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 19: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ (m+3)x \geq m-9 \end{cases}$. Có

bao nhiêu giá trị của tham số m để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 20: Bất phương trình: $\left|\frac{4}{x-5}\right| > \frac{1}{7}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên âm?

- A. Vô số. B. 23. C. 22. D. 21.

Câu 21: Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x + 3y < 5 \quad (1) \\ x + \frac{3}{2}y < 5 \quad (2) \end{cases}$. Gọi

S_1 là tập nghiệm của bất phương trình (1), S_2 là tập nghiệm của bất phương trình (2) còn S là tập nghiệm của hệ bất phương trình. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $S_1 \subset S_2$. B. $S_2 \subset S_1$.
C. $S_1 = S$. D. $S_2 \neq S$.

Câu 22: Biết hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x + 3y \leq 6 \\ 11x - 6y \leq 18 \\ x \geq 0 \end{cases}$ có

miền nghiệm là một miền đa giác (kể cả các cạnh của nó). Tính diện tích đa giác đó.

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 23: Miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 \leq 0 \\ 2x - 3y - 1 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ là:}$$

- A. Một nửa mặt phẳng. B. Một miền tam giác.
C. Một miền tứ giác. D. Một miền ngũ giác.

Câu 24: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$, với x

và y thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2 D. 3.

Câu 25: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ 3x + 5y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Biết

miền nghiệm của hệ bất phương trình là một đa giác. Diện tích của đa giác đó gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

- A. 6. B. 6,5. C. 7. D. 5,5.

Câu 26: Tập nghiệm của bất phương trình

$$\frac{|1-x|}{\sqrt{3-x}} > \frac{x-1}{\sqrt{3-x}} \text{ là:}$$

- A. $(-\infty; 3)$ B. $(-\infty; 1)$.
C. $(-\infty; 1) \cup (1; 3)$. D. $(1; 3)$.

Câu 27: Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 + 4m - 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m \leq \frac{1}{4}$. B. $m \geq \frac{1}{4}$. C. $m \leq -\frac{1}{4}$. D. $m \geq -\frac{1}{4}$.

Câu 28: Có bao nhiêu số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 10 thuộc tập nghiệm của bất phương trình $(x-1)\sqrt{(x+2)x} \geq 0$?

- A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.

Câu 29: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{7x+15-2x^2}$ là:

- A. $D = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$.
 B. $D = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.
 C. $D = \left(-\frac{3}{2}; 5\right)$.
 D. $D = \left[-\frac{3}{2}; 5\right]$.

Câu 30: Cho bất phương trình:

$$(2m+1)x^2 + 3(m+1)x + m + 1 > 0.$$

Biết tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình vô nghiệm là đoạn $[a; b]$. Tính độ dài đoạn $[a; b]$ trên trục số.

- A. 6. B. $\frac{1}{7}$. C. 4. D. $\frac{3}{7}$.

Câu 31: Tập nghiệm của bất phương trình

$$|x^2 - 4x + 3| + x^2 - 4x + 3 = 0$$
 là:

- A. $\{1; 3\}$. B. $(1; 3)$.
 C. $[1; 3]$. D. $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

Câu 32: Gọi a và b lần lượt là nghiệm nhỏ nhất và nghiệm lớn nhất của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 9 \leq 0 \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$$

Tính $a+b$.

- A. $\frac{5}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. -4. D. -2.

Câu 33: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-m} - \sqrt{8-2x}$ có dạng là một đoạn $[a; b]$ (với $a < b$) khi và chỉ khi:

- A. $m=4$. B. $m < 4$. C. $m \leq 4$. D. $m > 4$.

Câu 34: Tập nghiệm của bất phương trình

$$|2x^2 - 5x + 2| > 2x^2 - 5x + 2$$
 là:

- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$.
 C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. D. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 35: Tập nghiệm của bất phương trình

$$|2x^2 - 7x + 3| + 2x^2 - 7x + 3 > 0$$
 là:

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.
 C. $\mathbb{R}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$.

Câu 36: Tập nghiệm của phương trình:

$$\frac{|x^2 - 5x + 6|}{\sqrt{x-1}} = \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x-1}}$$
 là:

- A. $\{2; 3\}$. B. $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.
 C. $(1; 2] \cup [3; +\infty)$. D. $[2; 3]$.

Câu 37: Tập nghiệm của bất phương trình:

$$\frac{|x^2 - 8x + 12|}{\sqrt{5-x}} > \frac{x^2 - 8x + 12}{\sqrt{5-x}}$$
 là:

- A. $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$. B. $[2; 6]$.
 C. $[2; 5)$. D. $(2; 5)$.

Câu 38: Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m

để phương trình $\sqrt{x-2} + \frac{x-m}{\sqrt{x-2}} = \frac{2m}{\sqrt{x-2}}$ có nghiệm.

- A. $S = \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. B. $S = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$.
 C. $S = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. D. $S = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

Câu 39: Biết phương trình $\sqrt{x+1} \leq 2x-1$ có tập nghiệm là nửa khoảng $[a; +\infty)$, a gần với số nào nhất trong các số sau?

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 40: Bất phương trình $(x+2018)\sqrt{x} \leq 0$ tương đương với bất phương trình nào dưới đây?

- A. $\sqrt{x(x+2018)^2} \leq 0$. B. $(x+2018)\sqrt{x} < 0$.
 C. $(x+2018)^2\sqrt{x} \leq 0$. D. $(x+2018)^2\sqrt{x} < 0$.

Câu 41: Biết tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2(x-2)(x-5)} > x-3$ có dạng $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ (với $a < b$). Tính $a+b$.

- A. $5+\sqrt{5}$. B. $6+\sqrt{5}$. C. $7+\sqrt{5}$. D. $10+\sqrt{5}$.

Câu 42: Giá trị nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình $(m-4)x^2 - 2(m-6)x + m-5 \geq 0$ có tập nghiệm bằng $\mathbb{R}$ gần với số nào nhất trong các số sau đây?

- A. 4,5. B. 5. C. 5,5. D. 6.

Câu 43: Gọi S_1, S_2 lần lượt là tập nghiệm của các bất phương trình $x^2 - 3x + 2 > 0$ và $\frac{4x-2}{x+1} < x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $S_1 = S_2$. B. $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
C. $S_1 \subset S_2$. D. $S_2 \subset S_1$.

Câu 44: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình $\left| \frac{x^2 - mx - 1}{x^2 - 2x + 3} \right| \leq 1$ có tập nghiệm bằng $\mathbb{R}$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị thuộc khoảng $(0; 1)$ của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\frac{2x^2 - x + 5}{x^2 - (m+1)x + m}}$ xác định khi $x < 0$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 46: Cho bất phương trình:

$$x^2 + 2|x + 2m| + 4mx + 6m^2 - 3m + 1 < 0.$$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm.

- A. $-1 < m < -\frac{1}{2}$. B. $-1 < m < \frac{1}{2}$.
C. $-\frac{1}{2} < m < 1$. D. $\frac{1}{2} < m < 1$.

Câu 47: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để bất phương trình $x^2 + 6x \leq m(|x+3|+1)$ có nghiệm?

- A. 7. B. 8. C. 9. D. Vô số.

Câu 48: Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\sqrt{(x+5)(3-x)} \leq x^2 + 2x + m$ nghiệm đúng $\forall x \in [-5; 3]$ là nửa khoảng $[a; +\infty)$, trong đó a là một số nguyên dương. Tính số ước nguyên dương của a .

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 49: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \leq 0 \\ x^2 - (m+1)x + m \leq 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là một đoạn có độ dài bằng 1 trên trục số?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 50: Bác Thủy dự định trồng đậu và cà trên diện tích $8a$ ($1a = 100 m^2$). Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu lãi 3.000.000 đồng trên mỗi a , nếu trồng cà thì cần 30 công và thu lãi 4.000.000 đồng trên mỗi a . Biết tổng số công cần dùng không được vượt quá 180. Tính số tiền lãi lớn nhất thu được.

- A. 24 (triệu đồng). B. 25 (triệu đồng).
C. 26 (triệu đồng). D. 27 (triệu đồng).

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CHỦ ĐỀ 5

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Câu 1: Đáp án B.

Ta có:

$$mx + m < 2x \Leftrightarrow (m-2)x + m < 0 \quad (*)$$

Bất phương trình (*) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2=0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Câu 2: Đáp án D.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x+3 \neq 0 \\ 5-x \neq 0 \end{cases}.$$

Ta có:

$$\frac{1}{2x+3} \geq \frac{1}{5-x} \Leftrightarrow \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{x-5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-2}{(2x+3)(x-5)} \geq 0$$

Bảng xét dấu vế trái:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	5	$+\infty$	
VT		-	+	0	-	+

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right] \cup (5; +\infty)$.

Vậy có 6 số nguyên nhỏ hơn 10 thuộc S , đó là các số $-1; 0; 6; 7; 8; 9$.

Câu 3: Đáp án A.

$$2(m+1)x < (m+1)^2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (m^2-1)x > (m+1)^2 \quad (*)$$

Vì $|m| < 1$ nên $m^2 < 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow x < \frac{(m+1)^2}{m^2-1} = \frac{m+1}{m-1}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left(-\infty; \frac{m+1}{m-1}\right)$.

Câu 4: Đáp án B.

$$* m-2=0 \Leftrightarrow m=2.$$

Phương trình trở thành:

$$2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2.$$

* $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$. Khi đó phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$
 $\Leftrightarrow -m^2+4m-3 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$.

* Vậy với $m \in [1; 3]$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

$$\text{Do đó } a=1, b=3 \Rightarrow a+b=4.$$

Câu 5: Đáp án D.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f(x) = (5m-m^2-4)x^2 - (m-4)x - 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$* \text{ TH1: } 5m-m^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow m=1 \text{ hoặc } m=4.$$

- Với $m=1$:

$$f(x) = 3x-1;$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 3x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$$

- Với $m=4$:

$$f(x) = -1 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $m=1$ hoặc $m=4$ không thỏa mãn hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$.

$$* \text{ TH2: } 5m-m^2-4 \neq 0.$$

$$\text{Khi đó } f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m-m^2-4 > 0 \\ \Delta = -3m^2+12m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (1; 4) \\ m \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

* Tóm lại không có giá trị nào của m thỏa mãn ycbt.

Câu 6: Đáp án C.

Điều kiện:

$$x^2-5x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty).$$

* Với $x=1$ hoặc $x=4$:

$$(x^2-9)\sqrt{x^2-5x+4} = 0$$

Vậy $x=1, x=4$ là các nghiệm của bất phương trình.

$$* \text{ Với } x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$$

$$\text{thì } (x^2-9)\sqrt{x^2-5x+4} \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2-9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow |x| \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty).$$

Vậy trường hợp này bất phương trình có nghiệm là $x \in (-\infty; -3] \cup (4; +\infty)$.

$$* \text{ Vậy } S = (-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [4; +\infty).$$

Câu 7: Đáp án A.

$$\text{Điều kiện: } x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } x + \sqrt{x-2} < 2 + \sqrt{x-2} \\ \Rightarrow x < 2 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $S = \emptyset$.

Câu 8: Đáp án C.

Cách 1: * Giải bất phương trình:

$$(x-1)\sqrt{x} > 0 \quad (1).$$

Điều kiện: $x \geq 0$.

- Với $x=0$ thì $(x-1)\sqrt{x} = 0$. Do đó $x=0$ không là nghiệm của bất phương trình (1).

- Với $x > 0$:

$$(x-1)\sqrt{x} > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy bất phương trình (1) có tập nghiệm $S_1 = (1; +\infty)$.

* Giải bất phương trình $x-1 > 0$ (2).
 Dễ thấy bất phương trình (2) có tập nghiệm $S_2 = (1; +\infty)$.

* Ta thấy $S_1 = S_2$.

$$\text{Vậy } (x-1)\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0.$$

Cách 2: Ta có $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Với $x > 1$ thì $\sqrt{x} > 1 > 0$. Do đó nhân hai vế của bất phương trình $x-1 > 0$ với $\sqrt{x}$ ta được bất phương trình tương đương. Vậy C đúng.

Câu 9: Đáp án D.

Điều kiện:

$$\begin{cases} x-m > 0 \\ 2m+6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m \\ x \leq 2m+6 \end{cases}.$$

Để hàm số xác định trên khoảng $(-1; 0)$ thì ta phải có

$$\begin{cases} m \leq -1 \\ 2m+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đó là các giá trị $-3; -2; -1$.

Câu 10: Đáp án C.

Ta có $2x^2-3x+2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (do có $\Delta = -7 < 0$ và $a = 2 > 0$).

$$\text{Do đó } -2 \leq \frac{x^2+2x+m}{2x^2-3x+2} < 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+m \geq -4x^2+6x-4 \\ x^2+2x+m < 6x^2-9x+6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 4x + m + 4 \geq 0 & (1) \\ 5x^2 - 11x + 6 - m > 0 & (2) \end{cases}$$

Để bất phương trình đã cho thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$ thì (1) và (2) phải nghiệm

$$\text{đúng } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' \leq 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5m - 16 \leq 0 \\ 20m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{16}{5} \\ m < -\frac{1}{20} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{16}{5} \leq m < -\frac{1}{20}.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán, đó là các giá trị $-3; -2; -1$.

Câu 11: Đáp án D.

$$|x+2| + \sqrt{x^2 - 4x + 4} < 4$$

$$\Leftrightarrow |x+2| + \sqrt{(x-2)^2} < 4$$

$$\Leftrightarrow |x+2| + |x-2| < 4.$$

$$\text{Ta có } |x+2| + |x-2| = |x+2| + |2-x| \geq |x+2+2-x| = 4.$$

Vậy bất phương trình

$$|x+2| + \sqrt{x^2 - 4x + 4} < 4 \text{ vô nghiệm.}$$

Do đó $S = \emptyset$.

Câu 12: Đáp án D.

Điều kiện xác định của hàm số:

$$|x^2 + x - 3| - (x+6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |x^2 + x - 3| \geq x+6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 3 \geq x+6 \\ x^2 + x - 3 \leq -x-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 9 \\ x^2 + 2x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \geq 9$$

(do $x^2 + 2x + 3 > 0 \forall x$)

$$\Leftrightarrow |x| \geq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty).$$

$$\text{Vậy } D = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty).$$

Do đó $M = 3$ và $m = -3$.

Suy ra $M + m = 0$.

Câu 13: Đáp án A.

$$* 3x + 2 > 2x - 1 \Leftrightarrow x > -3.$$

$$* x + 4m^2 \leq 2mx + 1$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)x \geq 4m^2 - 1 (*)$$

- TH1: $2m-1=0$.

(*) trở thành $0x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy hệ bất phương trình đã cho có nghiệm $x > -3$.

$$\text{- TH2: } 2m-1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow x \leq 2m+1.$$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì ta phải có $2m+1 \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -2$.

$$\text{- TH3: } 2m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow x \geq 2m+1.$$

Suy ra hệ bất phương trình đã cho có nghiệm.

* Tóm lại hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow m \leq -2$.

Câu 14: Đáp án C.

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 - 2mx + 5m - 8.$$

$$\text{Có } \Delta' = m^2 - 5m + 8.$$

- Nếu $\Delta' < 0$ thì $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó bất phương trình $f(x) \leq 0$ vô nghiệm.

- Nếu $\Delta' = 0$ thì $f(x) > 0 \forall x \neq m$;

$f(m) = 0$. Khi đó bất phương trình $f(x) \leq 0$ có 1 nghiệm duy nhất $x = m$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó bất phương trình $f(x) \leq 0$ có tập nghiệm là $S = [x_1; x_2]$.

Vậy để bất phương trình $f(x) \leq 0$ có tập nghiệm là một đoạn có độ dài

bằng 4 thì ta phải có: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ |x_2 - x_1| = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 8 > 0 \\ \left| \left(m + \sqrt{m^2 - 5m + 8} \right) - \left(m - \sqrt{m^2 - 5m + 8} \right) \right| = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 8 > 0 \\ 2\sqrt{m^2 - 5m + 8} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 5m + 8} = 2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 8 = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$$

Vậy $S = \{1; 4\}$. Do đó tổng các phần tử của S bằng 5.

Lưu ý: Ta có thể giải như sau:

$$|x_2 - x_1| = 4 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 4.$$

Sau đó áp dụng định lí Vi-et để tìm m .

Câu 15: Đáp án C.

Điều kiện:

$$\begin{cases} 5x + 6 \geq 0 \\ 7x + 11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{6}{5} \\ x \geq -\frac{11}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{6}{5}.$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 - 4x - 9 + \sqrt{5x+6} + \sqrt{7x+11} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - x - 2) + \sqrt{5x+6} - (x+2) + \sqrt{7x+11} - (x+3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - x - 2) - \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{5x+6} + x + 2} - \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{7x+11} + x + 3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)$$

$$\times \left[2 - \frac{1}{\sqrt{5x+6} + x + 2} - \frac{1}{\sqrt{7x+11} + x + 3} \right] \leq 0 (*)$$

Với $x \geq -\frac{6}{5}$ thì

$$\begin{cases} \sqrt{5x+6} + x + 2 \geq \frac{4}{5} \\ \sqrt{7x+11} + x + 3 \geq \frac{9 + \sqrt{65}}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5x+6} + x + 2} + \frac{1}{\sqrt{7x+11} + x + 3} \leq \frac{5}{4} + \frac{5}{9 + \sqrt{65}} < 2$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{\sqrt{5x+6} + x + 2} - \frac{1}{\sqrt{7x+11} + x + 3} > 0 \forall x \geq -\frac{6}{5}$$

Do đó $(*) \Rightarrow (x+1)(x-2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Kết hợp với điều kiện ta có

$$S = [-1; 2].$$

Do đó $a+b = -1+2 = 1$.

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN

Câu 1: Đáp án C.

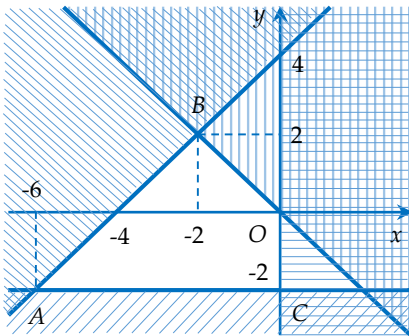
Phương trình đường thẳng d :

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0.$$

Lấy điểm $O(0;0)$, ta có $O \notin d$ và $2 \cdot 0 + 0 - 2 < 0$.

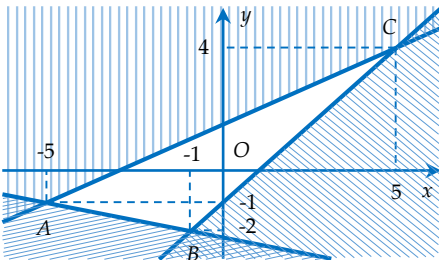
Vậy miền không bị gạch bỏ (bao gồm cả đường thẳng d) là miền nghiệm của bất phương trình $2x + y - 2 \geq 0$.

Câu 2: Đáp án C.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác $ABOC$ với $A(-6; -2)$, $B(-2; 2)$ và $C(0; -2)$.

Câu 3: Đáp án C.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tam giác ABC với $A(-5; -1)$, $B(-1; -2)$ và $C(5; 4)$. Lập bảng:

Đỉnh	$A(-5; -1)$	$B(-1; -2)$	$C(5; 4)$
T	-17	-3	3

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất bằng -17 khi $x = -5$ và $y = -1$. Do đó $x_0 = -5$ và $y_0 = -1 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 26$.

Câu 4: Đáp án D.

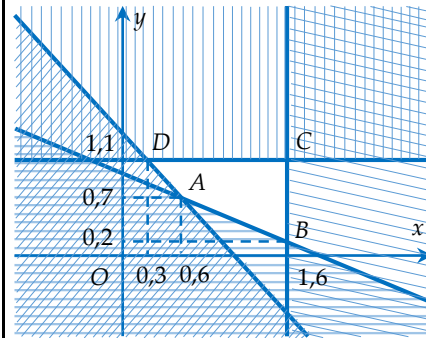
Gọi x và y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó mua mỗi ngày. Khi đó x và y phải thỏa mãn hệ bất

$$\text{phương trình: } \begin{cases} 8x + 6y \geq 9 \\ 2x + 4y \geq 4 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases}$$

Lượng tiền để mua thịt là

$$T = 250x + 85y \text{ (nghìn đồng).}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác $ABCD$ với $A(0,6; 0,7)$, $B(1,6; 0,2)$, $C(1,6; 1,1)$ và $D(0,3; 1,1)$.



Lập bảng:

Đỉnh	$A(0,6; 0,7)$	$B(1,6; 0,2)$
T	209.500	417.000
Đỉnh	$C(1,6; 1,1)$	$D(0,3; 1,1)$
T	493.500	168.500

Vậy chi phí mua thịt ít nhất là 168.500 đồng.

III. ĐỀ KIỂM TRA CHỦ ĐỀ 5

Câu 1: Đáp án D.

Xét bất phương trình:

$$(x + 2018)\sqrt{x + 2019} \geq 0 \quad (*)$$

Điều kiện: $x + 2019 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2019$.

* Dễ thấy $x = -2019$ thỏa mãn bất phương trình (*).

* Với $x > -2019$:

$$(*) \Leftrightarrow x + 2018 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2018$$

Vậy trong trường hợp này bất phương trình (*) có nghiệm $x \geq -2018$.

* Vậy (*) có tập nghiệm

$$S = [-2018; +\infty) \cup \{-2019\}.$$

Mặt khác xét bất phương trình $x + 2018 \geq 0$. Bất phương trình này có tập nghiệm $S' = [-2018; +\infty)$.

Vậy $S \neq S'$. Do đó bất phương trình $x + 2018 \geq 0$ không tương đương với

bất phương trình

$$(x + 2018)\sqrt{x + 2019} \geq 0.$$

Câu 2: Đáp án D.

* Xét bất phương trình

$$(x - 1)\sqrt{x + 2} > 0 \quad (*)$$

Điều kiện: $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

+ $x = -2$ không thỏa mãn bất phương trình (*).

$$+ x > -2 : (*) \Rightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy trong trường hợp này bất phương trình có nghiệm $x > 1$.

Vậy tập nghiệm của (*) là $S = (1; +\infty)$.

* Xét bất phương trình: $x - 1 > 0$ có tập nghiệm $S' = (1; +\infty)$.

Ta thấy $S = S'$.

$$\text{Do đó } (x - 1)\sqrt{x + 2} > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0.$$

Câu 3: Đáp án B.

Học sinh giải sai từ bước (II), vì

$$\frac{1}{2-x} > \frac{1}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 2-x < 7 \end{cases} \text{ chỉ đúng khi } 2-x > 0.$$

Câu 4: Đáp án C.

$$S = \emptyset \text{ vì } |x^2 - 3x + 2| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 5: Đáp án C.

$$x(x-1)^2 \geq 4-x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 2x - 4 \geq 0.$$

Phương trình $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 2$ (nghiệm bội 1).

Xét dấu vế trái:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
VT	-	0	+

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $[2; +\infty)$.

Câu 6: Đáp án C.

Hệ bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x - 1 < -3x + 3 \\ 4 - 3x < 6 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x < 4 \\ -x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{5} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-2; \frac{4}{5}\right).$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình chứa 2 số nguyên là -1 và 0.

Câu 7: Đáp án D.

* Xét bất phương trình $x + 5 > 0$. Để