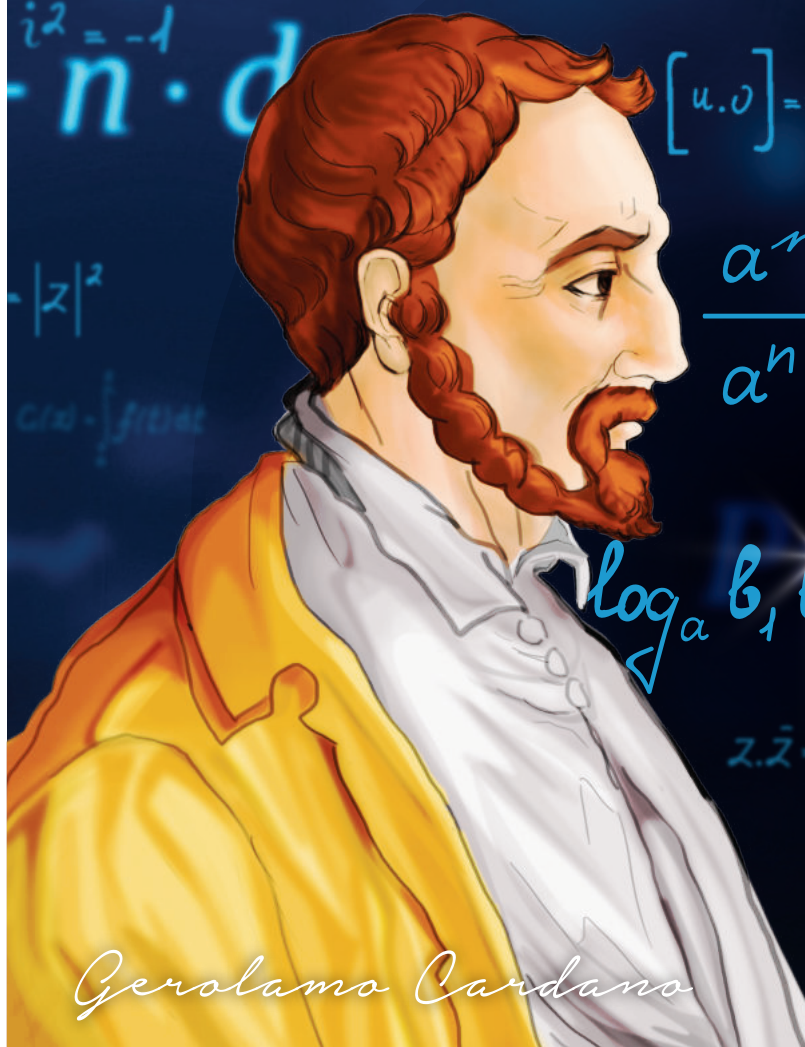
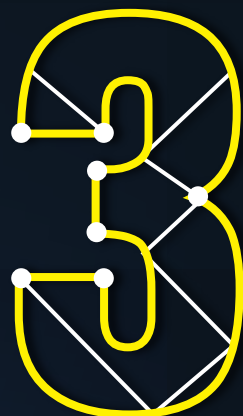


NGOC HUYỀN LB



CÔNG PHÁP TOÁN



**ĐH
QG
Hà Nội**

**NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

Nắm chắc phương pháp giải nhanh toán trắc nghiệm lớp 12
Xây dựng nền tảng vững chắc chuẩn bị cho kì thi THPT Quốc gia
Tặng kèm 20 Đề kiểm tra 45' và Đề thi học kì chọn lọc

MỘT SỐ SẢN PHẨM ĐÃ VÀ SẴN PHÁT HÀNH

- Công phá Toán 1
- Công phá Toán 2
- Công phá Toán 3
- Công phá Kỹ Thuật Casio lớp 10-11-12
- Công phá Tiếng Anh 1
- Công phá Tiếng Anh 2
- Công phá Tiếng Anh 3
- Chinh phục bài tập từ vựng Tiếng Anh
- Chinh phục bài tập điền từ vào đoạn văn Tiếng Anh
- Công phá lý thuyết Hóa
- Công phá bài tập Hóa
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Toán
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Vật lý
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Hóa
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Sinh
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Tiếng Anh
- Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Ngữ văn
- Công phá Vật lý 1
- Công phá Vật lý 2
- Công phá Vật lý 3
- Công phá lý thuyết Sinh
- Công phá bài tập Sinh
- Công phá Ngữ văn 1
- Công phá Ngữ văn 2

HỆ THỐNG ĐẠI LÝ PHÁT HÀNH

Miền Bắc:

1. Hệ thống siêu thị Tiên Phong
2. Nhà sách Nam Anh
3. Hệ thống siêu thị Fahasa
4. Nhà sách Tiến Thọ
6. Nhà sách Minh Thắng
7. Nhà sách Quảng Lợi
8. Nhà sách Bình Thủy
9. Cửa hàng sách khu vực Trần Quốc Hoàn
10. Cửa hàng sách khu vực Đinh Lễ
11. Hệ thống sách Phương Nam
12. Nhà sách Trí Tuệ

Miền Nam

1. Hệ thống siêu thị Fahasa
2. Hệ thống nhà sách Minh Khai
3. Hệ thống nhà sách Phương Nam
4. Nhà sách Đức Trí

Nhà sách Online

1. Nhà sách Tiki: tiki.vn
2. Nhà sách Newshop: newshop.vn
3. Nhà sách Pibook: pibook.vn
4. Nhà sách Tictak: tictak.vn
5. Nhà sách Fahasa: fahasa.com
6. Nhà sách Vinabook: vinabook.com

NHÀ SÁCH GIÁO DỤC LOVEBOOK

Địa chỉ : Số 86 Cù Chính Lan, phường Khương Mai, Thanh Xuân, Hà Nội
Điện thoại : 19002825 – 02477790839 / zalo: 0963 140 260
Email : lovebook.vn@gmail.com
Website : <http://lovebook.vn>
Fanpage : <http://facebook.com/lovebook.vn>

ISBN: 978 - 604 - 968 - 630 - 6



MORE THAN A BOOK

GIÁ 250.000đ

LỜI MỞ ĐẦU

Ngay từ khi bước chân vào ngưỡng cửa đại học (tháng 8/2016), tôi đã suy nghĩ rất nhiều về một cuốn sách có thể giúp cho các em học sinh tự tin với môn Toán và yêu thích nó hơn. Hơn nữa, kể từ năm đó, các em học sinh phải làm bài thi môn Toán dưới hình thức Trắc nghiệm với áp lực thời gian rất lớn (riêng kì thi THPT quốc gia, các em phải làm 50 câu/90 phút). Bởi vậy mà một tài liệu giúp các em tối ưu thời gian ôn luyện càng trở nên cần thiết hơn bao giờ hết. Chính vì thế, sau khi tham khảo ý kiến của thầy cô và bạn bè, tôi đã quyết định bắt tay vào viết cuốn sách này (1/11/2016). Sau gần 5 tháng miệt mài làm việc, cùng với sự giúp đỡ của thầy cô, bạn bè, tôi đã hoàn thành xong đứa con tinh thần của mình.

Công Phá Toán 3 được phát hành lần đầu tiên vào 6/4/2017 (năm học 2016-2017). Chỉ trong tháng đầu tiên phát hành, hơn 4000 cuốn đã được bán ra, phá bỏ mọi kỉ lục của nhà sách Lovebook từ năm 2012 đến giờ. Tuy nhiên, trong lần phát hành thứ hai và thứ 3 (năm học 2017-2018 và năm học 2018 - 2019), Công Phá Toán 3 đã vươn lên một nấc mới khi đạt tới 20 000 cuốn và 30 000 cuốn được phát hành ra trong suốt năm học. Đặc biệt hơn khi Công Phá Toán 3 (cùng Công Phá Toán 2) liên tục nhiều tuần liền đứng Top 1 trong số các sách tham khảo được bán trên **Tiki.vn** và cũng chính Công Phá Toán đang giữ kỉ lục nhiều lượt đánh giá 5 sao nhất của Tiki.vn (với gần 1000 lượt đánh giá, quý độc giả kiểm chứng tại: <http://bit.ly/2jK7hUW> và <http://bit.ly/2CZrjHy>). Sau khi được phát hành, cuốn sách đã nhận được rất nhiều những phản hồi tích cực của các em học sinh, quý thầy cô trên cả nước trên facebook, và email. Dưới đây, tôi xin được phép chia sẻ một số phản hồi của thầy cô và các em học sinh đã đọc cuốn Công Phá Toán 3:

“Cảm nhận ban đầu của thầy là sách rất đẹp và chất. Đầy đủ các dạng toán, bài tập thì hết sức thời sự và nóng được tuyển chọn từ các trường trên cả nước. Hơn nữa lại có lời giải chi tiết và dễ hiểu, điều này giúp học sinh có điều kiện so sánh đối chiếu kết quả sau khi làm bài. Thầy nghĩ là nó thực sự rất có ích cho các em học sinh trong kì thi sắp tới.”

Thầy Nguyễn Thư, giáo viên Toán, THPT Phương Xá, Phú Thọ.

“Công Phá Toán có giải thích cách sử dụng máy tính tích hợp rất rõ ràng và mạch lạc. Cuốn sách rất phù hợp với các bạn đang cần tổng ôn lại tất cả các dạng toán qua một tư liệu giải thích rất rõ ràng rành mạch những dạng toán từ 7,0-8,8 điểm. Cuốn sách phù hợp đặc biệt với những bạn khủng hoảng môn toán, có thể cày tập trung 1 tháng hết 1 cuốn sách và nếu như điểm của các em đang lẹt lẹt mức 6,0-7,0 thì các em có thể tăng mạnh 1,0-2,0 điểm sau khi học hết cuốn sách này.”

Thầy Đoàn Trí Dũng, giáo viên Toán, TTLT Thành Công, Hà Nội.

“Cô đọc hơn nửa CPT của em rồi! Cơ bản là rất chi tiết và đẹp. Đây là cuốn sách hay nhất trong các quyển sách tham khảo cô đã từng đọc!”

Cô Trần Cẩm Huyền, giáo viên Toán, THPT Cẩm Phả, Quảng Ninh.

"Cuốn sách thực sự khiến chị ngỡ ngàng và bị cuốn hút. Công phá toán là một cuốn sách rất chuyên nghiệp và giống như một tài liệu nước ngoài thực thụ. Thực sự, chị rất thích cách mà em trình bày rất khoa học, bắt mắt."

Cô Đỗ Bảo Thoa, giáo viên Toán xã Đông Yên, huyện Quốc Oai, Hà Nội.

"Sáng nay, thấy mua cuốn sách Công Phá Toán em viết, thấy rất ấn tượng. Qua cuốn sách, thấy thấy được khả năng của em, niềm đam mê cùng sự tận tâm với công việc."

Thầy Mạc Đăng Nghị, phó Hiệu Trưởng THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương.

"Công Phá Toán 3 rất đầy đủ nội dung và rất phù hợp cho các em học sinh giai đoạn tổng ôn luyện! Cuốn sách trình bày màu đẹp với 7 chủ đề trọng tâm và phần cuối tổng ôn luyện để. Sách dày 400 trang mà cứ ngỡ cả ngàn trang, nội dung phủ khắp các mảng Toán 12, với câu hỏi và lời giải chi tiết có kết hợp kỹ năng sử dụng máy tính bỏ túi làm bài trắc nghiệm nhanh".

Thầy Lưu Công Hoàn, THPT Nguyễn Trãi, Hoà Bình.

"Ở cuốn Công Phá Toán, lý thuyết cơ bản, cách giải từng dạng bài tập, công thức giải nhanh, cách tính bằng casio... đều được cô giáo tương lai trình bày đầy đủ, chi tiết và dễ hiểu. Cùng với đó là cách trình bày cột đôi một bên phải nội dung sách, bên trái là Study Tip. Ngoài ra còn trình bày nhiều cách giải cùng lúc, bao gồm cách giải truyền thống, giải bằng công thức giải nhanh, giải bằng casio. Có bài tập tự luyện và đề thi tự luyện cho các em học sinh. Tất cả nội dung được phối hợp với nhau một cách sáng tạo, logic và mang phong cách rất riêng!".

Thầy Nguyễn Văn Lực, giáo viên Toán TP Cần Thơ.

"Đọc xong cuốn Công Phá Toán và Bộ đề chuyên, tôi nhận thấy cô đầu tư rất nhiều tâm huyết với nó. Sách viết rất chi tiết, cập nhật kiến thức mới và rất dễ hiểu, mong Huyền cố gắng hơn nữa để cho ra những tác phẩm hay hơn, mang tính chất chuyên nghiệp hơn trong viết sách."

Thầy Mai Tiến Linh, giáo viên Toán, THPT Tĩnh Gia 4, Thanh Hoá.

"Nhờ có quyển sách Công Phá Toán mà em xử lý các bài tập nhanh hơn, mấy câu đố thi thì chỉ cần nhẩm vài giây mà không cần bấm chị ạ."

Em Nguyễn Phụng Yến, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp.

"Phải nói rằng Công Phá Toán quá tuyệt, từ ngữ dễ hiểu, bài tập giải rõ ràng, 2 tháng cuối em làm người yêu với sách của chị. Em chỉ thắc mắc là phần hàm số không có tương giao giữa đồ thị. Tuyệt vời nhất là Hình học không gian thuần túy, em ngu phần đó có tiếng, đọc sách của chị khá hơn rồi".

Em Phan Thị Thuỳ Giang, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Quảng Nam.

"Cuốn Công Phá Toán đã thay đổi điểm số của em rất nhiều, em chăm chỉ học hỏi ghi chép từng mảng kiến thức ghi vào đầu sách. Em cảm ơn chị rất nhiều vì đã viết nên cuốn sách tuyệt vời như vậy."

Em Lê Nhật Hào, THPT TP Cao Lãnh, Đồng Tháp.

"Em từ 1 đứa không nắm chắc kiến thức toán. Suốt mấy ngày qua, em tập trung đọc Công Phá Toán của chị, giờ em chỉ còn 3 chương thôi, CPT của chị có tất tần tật, nhờ đó mà em nắm chắc lý thuyết, bây giờ các câu lý thuyết em có thể tự tin mà làm được. Những công thức giải nhanh cho các bài mà nếu giải thường mất cả giờ mới làm được thì chị cũng truyền đạt cho chúng em."

Em Nguyễn Kim Ngân, THPT Giá Rai, Bạc Liêu.

"Công phá Toán của chị wonderful quá cơ. Đọc mãi, tìm hiểu mãi mà không biết chán. Từ hôm nay em bắt đầu lên kế hoạch cày từng chuyên đề một, cày tới khi nào nát bét ra thì thôi. Mẹ em bảo cứ nhìn sách vở là biết mình học hành thế nào mà, giữ sách vở mới quá cũng không tốt chị nhỉ."

Em Nguyễn Thị Thu Thuỷ, THPT Ninh Giang, Hải Dương.

"Sách rất đẹp và nội dung thì quá tuyệt. Mình học toán yếu nhưng khi xem vài bài thì mình đã biết làm. Sách phù hợp để luyện thi THPT quốc gia và lấy lại căn bản. Cực kì chi tiết và logic nhất trong tất cả cuốn sách mình đã được đọc qua. Bạn nào yếu toán thì phải mua ngay đi".

Em Võ Ngọc Thảo, Hồ Chí Minh

Còn rất nhiều tin nhắn facebook, email chia sẻ về cuốn sách mà tôi không thể kể hết ở đây. Thực sự, tình cảm và sự quan tâm của mọi người dành cho CPT đã vượt quá sự kì vọng của tôi. Sau khi kì thi THPT quốc gia 2017 kết thúc, niềm vui lại tiếp tục đến với tôi khi những người em ngày đêm nghiền ngẫm cuốn sách đạt kết quả cao liên tục báo tin vui cho tôi, ví dụ như em Nguyễn Đức Giang (10 điểm), em Mai Thùy Dương (10 điểm), em Lê Viết Thắng (9,8 điểm), em Phạm Trung Hiếu (9,6 điểm), em Thái An Phú (9,2 điểm),...

Công phá toán phiên bản 2019-2020 có nét gì mới?

Mặc dù nhận được nhiều lời khen ngợi, nhiều tin vui từ các em học sinh vừa trải qua kì thi THPT quốc gia, trong lần phát hành đầu tiên và lần thứ hai vừa rồi, cuốn sách cũng không thể tránh khỏi những mặt hạn chế, thiếu sót. Tuy nhiên, thật may mắn khi tôi liên tục được thầy cô và các em góp ý để cuốn sách hoàn thiện hơn. Trong suốt hơn 8 tháng qua, tôi đã liên tục cập nhật những mảnh ghép còn thiếu và những ý tưởng mới mẻ để khi trở lại trong năm học này cuốn sách trở nên hoàn thiện và tối ưu hơn. Ở phiên bản năm 2019 -2020, tôi đã đưa ra một số thay đổi, bổ sung đáng kể sau:

Thứ nhất: Tôi cập nhật toàn bộ các bài tập trong đề thi THPT quốc gia 2017 và 2018 vừa rồi theo từng dạng trong sách. Tất nhiên những bài trùng lặp với các bài tập đã có trong sách thì tôi không đưa vào nữa, tránh tình trạng loãng sách.

Thứ hai: Tôi bổ sung thêm 100 trang nội dung Vận Dụng Cao, dạng bài mới xuất hiện trong thời gian gần đây để các em có học lực Giỏi, Xuất Sắc (mục tiêu thi THPT quốc gia từ 8 trở lên) có thể cải thiện thêm, mài giũa thêm kĩ năng.

Thứ ba: Tôi bổ sung đầy đủ các đáp án chi tiết ở 11 bài kiểm tra luôn vào trong sách. Điều này sẽ giúp các em chủ động hơn trong việc đọc, không phải chờ đợi Mail từ nhà sách.

Thứ tư: Tôi thử nghiệm đưa cách trình bày ba cột (phần đáp án chi tiết) vào trong sách. Trong quá trình biên soạn, có rất nhiều thứ tôi muốn đưa vào trong sách. Tuy nhiên, khuôn khổ sách có hạn nên tôi buộc phải sử dụng thêm cách dàn trang ba cột này để có thể truyền tải đầy đủ nhất cho các em. Vậy nên tôi cũng rất mong quý độc giả hiểu và thông cảm cho sự phiền toái khi phải đọc chữ nhỏ trong sách.

Thứ năm (trong lần tái bản tháng 7/2019): Tôi bổ sung thêm toàn bộ công thức giải nhanh được sử dụng trong mảng Toán Trắc Nghiệm lớp 12 để giúp các em tiện tra cứu hơn.

Thứ sáu (trong lần tái bản tháng 7/2019): Tôi cập nhật thêm một số bài tập điển hình trong bộ đề Tham Khảo cũng như Chính Thức của BGD trong năm học vừa rồi để các em rèn luyện tốt hơn.

Ngoài sáu sự thay đổi lớn kể trên, Công Phá Toán 3 phiên bản 2019-2020 còn có thêm một số thay đổi nhỏ về mặt hình thức và số lượng bài tập để phù hợp, cân đối hơn. Có thể vẫn còn chỗ nào đó chưa được hoàn hảo 100% nhưng tôi tin chắc chắn rằng Công Phá Toán 3 trong lần tái bản thứ hai này sẽ hoàn thiện hơn, tối ưu hơn rất nhiều.

Công phá Toán 3 giúp em được những gì?

✓ Thứ nhất, cuốn sách giúp các em hệ thống lại toàn bộ phương pháp, tư duy giải toán cần thiết trong chương trình lớp 12. Đặc biệt, tôi rất chú trọng tới những vấn đề mà học sinh thường hay nhầm lẫn.

✓ Thứ hai, cuốn sách giúp các em nắm được toàn bộ những vấn đề hay nhất, cần thiết nhất trong 250 đề thi thử của các trường, Sở Giáo dục và Đào tạo trên toàn quốc. Hàng ngày có rất nhiều đề thi thử được chia sẻ

trên mạng, tuy nhiên có nhiều đề thi không đảm bảo chất lượng, các câu hỏi không bám sát cấu trúc đề thi của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Cuốn sách sẽ giúp các em sàng lọc những vấn đề quan trọng và CẦN phải học để tiết kiệm thời gian sâu tằm, in ấn để. Ngoài ra, những bài tập chất lượng này còn giúp các em khắc sâu thêm tư duy giải toán trắc nghiệm lớp 12.

✓ Thứ ba, cuốn sách giúp các em nắm được những kĩ năng xử lý casio cần thiết trong việc học toán lớp 12. Tuy nhiên ở cuốn Công phá toán này, tất cả kĩ năng MTCT đều gắn chặt với tư duy giải Toán, không chỉ đơn thuần là các thao tác bấm máy thông thường.

✓ Thứ tư, cuốn sách tích hợp hệ thống gửi tài liệu qua Mail, để học sinh có thể khai thác triệt để cuốn sách. Ngoài gửi qua Mail các tài liệu liên quan tới sách theo trình tự thời gian, tôi còn gửi thêm một số tài liệu hay, liên quan tới nội dung cuốn sách khi sâu tằm được để các em thêm một lần nữa khai thác triệt để giá trị của sách. Đây cũng là một cách để đảm bảo quyền lợi cho các em, quý độc giả sử dụng sách chính hãng. Vậy nên sau khi nhận được sách, quý độc giả vui lòng khai báo chính hãng tại: lovebookcare.com để nhận được Mail từ tôi và nhà sách Lovebook.

Chính vì những đặc điểm trên, tôi rất mong các em học sinh, quý độc giả hãy thường xuyên trao đổi, liên hệ với tôi để tôi có cơ hội được phục vụ quý vị tốt nhất. Trước khi đọc kĩ vào nội dung sách, tôi mong các em, quý độc giả nắm tổng thể nội dung sách. Cuốn sách tôi viết được chia thành 3 phần chính như sau:

Phần thứ nhất:

- Hệ thống tư duy, phương pháp, công thức giải nhanh các dạng toán theo chuyên đề
- Hệ thống ví dụ, bài tập minh họa điển hình kèm phân tích, đánh giá, mở rộng
- Hệ thống bài tập rèn luyện kèm lời giải chi tiết được chọn lọc kĩ càng từ 250 đề thi thử của các trường trên toàn quốc.

Phần thứ hai: 11 bài kiểm tra tổng ôn luyện sau mỗi chủ đề.

Phần thứ ba: Đáp án chi tiết toàn bộ chủ đề.

Do tôi vừa mới bước chân vào đại học, kinh nghiệm sư phạm còn chưa nhiều, hơn nữa đây là cuốn sách viết riêng đầu tiên của tôi, chắc chắn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, tôi rất mong nhận được sự góp ý từ các em học sinh và quý độc giả trên toàn quốc.

Mọi góp ý xin được gửi về ngochuyenlb.hnue@gmail.com hoặc fb: facebook.com/huyenvu2405.

Group chuyên môn (tham gia nhóm tương ứng với lớp):

- **Lớp 10:** facebook.com/groups/cptlop10
- **Lớp 11:** facebook.com/groups/cptlop11
- **Lớp 12:** facebook.com/groups/cptlop12
- **Group cộng đồng Ngọc Huyền LB:** facebook.com/groups/ngochuyenfamily/

Fan page (nhắn tin hỏi bài):

- **Lovebook care Toán:** m.me/lovebookcaretoan.
- **Tác giả:** m.me/ngochuyenlb.

Mọi thắc mắc liên hệ trực tiếp nhà sách Lovebook: m.me/lovebookcaretoan | **Zalo:** 0963 140 260

Yêu thương

Ngọc Huyền LB

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: HÀM SỐ VÀ CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM	19
I. Tính đơn điệu của hàm số	19
A. Lý thuyết về tính đơn điệu của hàm số	19
B. Các dạng toán về tính đơn điệu của hàm số	20
Dạng 1: Bài toán không chứa tham số	20
Bài tập rèn luyện kĩ năng	26
Dạng 2: Bài toán chứa tham số	28
Bài tập rèn luyện kĩ năng	38
II. Cực trị của hàm số	40
A. Lý thuyết về cực trị của hàm số	40
B. Các dạng toán liên quan đến cực trị	42
Bài đọc thêm: Phương pháp sử dụng máy tính cầm tay để giải nhanh các bài tập định tham số m để hàm $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0	64
Bài tập rèn luyện kĩ năng	66
III. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số	70
A. Lý thuyết về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số	70
B. Các dạng toán về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số	73
Bài đọc thêm 1: Phương pháp giải nhanh các bài tập tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$	82
Bài đọc thêm 2: Phương pháp giải nhanh các bài tập xác định m để hàm số đạt giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$	18
Bài tập rèn luyện kĩ năng	85
C. Ứng dụng của GTLN, GTNN vào thực tiễn, giải quyết các vấn đề tối ưu	88
Bài tập rèn luyện kĩ năng	94
IV. Đường tiệm cận	98
A. Lý thuyết về đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số	98
B. Lý thuyết về đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số	101
C. Một số dạng toán thường gặp liên quan đến đường tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất	105
Bài tập rèn luyện kĩ năng	109
V. Các dạng đồ thị hàm số thường gặp	113
Bài tập rèn luyện kĩ năng	121
VI. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số	127
Bài tập rèn luyện kĩ năng	136

VII. Một số dạng toán vận dụng cao về hàm số	137
A. Bài toán về hàm đạo hàm, hàm tổng, hàm hợp	137
B. Bài toán về biến đổi đồ thị	157
Các công thức giải nhanh về hàm số và ứng dụng của đạo hàm	185
Bài kiểm tra chủ đề 1 - số 1	192
Bài kiểm tra chủ đề 1 - số 2	196
Bài kiểm tra chủ đề 1 - số 3	200
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 1	204
CHỦ ĐỀ 2: HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT	246
I. Lũy thừa – Hàm số lũy thừa	246
A. Khái niệm lũy thừa	246
B. Hàm số lũy thừa	247
II. Logarit – Hàm số logarit	248
A. Logarit	248
B. Hàm số logarit	248
III. Hàm số mũ	249
Một số bài toán liên quan đến đồ thị hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit	250
IV. Ứng dụng của hàm số mũ, hàm số logarit trong thực tế	259
Bài tập rèn luyện kĩ năng	269
V. Phương trình mũ và phương trình logarit	274
A. Đưa về cùng cơ số hoặc logarit hóa – mũ hóa	275
B. Phương pháp đặt ẩn phụ (dạng 1)	280
C. Phương pháp đặt ẩn phụ (dạng 2: đặt ẩn phụ không hoàn toàn)	285
D. Phương pháp logarit hóa, mũ hóa	286
E. Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số	288
VI. Các bài toán biến đổi logarit	289
A. Tính một logarit theo một logarit đã cho	289
B. Tính một logarit theo hai logarit đã cho	289
Bài tập rèn luyện kĩ năng	291
Dạng 1: Các dạng toán tìm tập xác định, bài toán đồ thị và tính chất của các hàm logarit	291
Dạng 2: Các phép biến đổi mũ, logarit	294
Dạng 3: Giải phương trình và bất phương trình mũ, logarit	296
Các công thức giải nhanh về lũy thừa – mũ và logarit	299
Bài kiểm tra chủ đề 2 - số 1	301
Bài kiểm tra chủ đề 2 - số 2	304
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 2	307

I. Nguyên hàm và các tính chất cơ bản	325
II. Hai phương pháp cơ bản để tìm nguyên hàm	326
III. Các dạng toán về nguyên hàm	329
IV. Bổ sung một số vấn đề về nguyên hàm	334
Bài tập rèn luyện kĩ năng	340
V. Khái niệm và các tính chất cơ bản của tích phân	342
VI. Hai phương pháp cơ bản để tìm tích phân	343
VII. Ứng dụng hình học của tích phân	346
VIII. Một số dạng tích phân thường gặp	351
Bài tập rèn luyện kĩ năng	368
IX. Ứng dụng của nguyên hàm, tích phân trong thực tế	372
Bài tập rèn luyện kĩ năng	375
X. Một số dạng tích phân vận dụng cao	377
Các công thức giải nhanh về nguyên hàm – tích phân và ứng dụng	390
Bài kiểm tra chủ đề 3 - số 1	396
Bài kiểm tra chủ đề 3 - số 2	399
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 3	404

I. Khái niệm số phức	418
II. Các phép toán với số phức	419
Bài đọc thêm 1: Giới thiệu một số tính năng tính toán số phức bằng máy tính Casio	420
Bài tập rèn luyện kĩ năng	425
Bài đọc thêm 2: Các bài toán số phức vận dụng cao	429
1. Bài toán tìm số phức liên quan đến môđun	429
2. Biểu diễn hình học của số phức, quỹ tích phức	436
3. Một số dạng toán nâng cao về số phức	439
III. Giải bài toán cực trị của số phức bằng phương pháp hình học giải tích	453
Các công thức giải nhanh về số phức	466
Bài kiểm tra chủ đề 4	467
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 4	470

CHỦ ĐỀ 5: KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ KHỐI ĐA DIỆN QUEN THUỘC 477

I. Khái niệm về hình đa diện và khối đa diện	477
II. Khối đa diện lồi và khối đa diện đều	480
III. Thể tích khối đa diện	481
Bài tập rèn luyện kĩ năng	494
Các công thức giải nhanh về khối đa diện	500
Bài kiểm tra chủ đề 5	503
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 5	507

CHỦ ĐỀ 6: MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN 521

I. Mặt cầu, khối cầu	521
Bổ sung một số vấn đề mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình đa diện	524
Bài tập rèn luyện kĩ năng	533
II. Mặt nón, hình nón, khối nón	535
Một số dạng toán và công thức giải bài toán mặt nón thường gặp	540
III. Mặt trụ, hình trụ, khối trụ	542
Một số dạng toán và công thức giải bài toán mặt trụ thường gặp	545
Bài tập rèn luyện kĩ năng	547
Các công thức giải nhanh về mặt cầu – mặt trụ – mặt nón	551
Bài kiểm tra chủ đề 6	556
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 6	561

CHỦ ĐỀ 7: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 573

I. Hệ tọa độ trong không gian	573
II. Phương trình mặt phẳng	575
III. Phương trình đường thẳng	580
Bài đọc thêm 1: Bài toán cực trị trong không gian	585
Bài tập rèn luyện kĩ năng	594
IV. Mặt cầu	603
Bài tập rèn luyện kĩ năng	606
Bài đọc thêm 2: Ứng dụng phương pháp tọa độ hóa trong giải toán hình học không gian	609
Các công thức giải nhanh về phương pháp tọa độ trong không gian	618
Bài kiểm tra chủ đề 7	620
Hướng dẫn giải chi tiết chủ đề 7	625

TRA CỨU THUẬT NGỮ 643

Dạng 1

B. Các dạng toán liên quan đến cực trị

Xác định điểm cực trị của hàm số, điểm cực trị của đồ thị hàm số, tìm giá trị cực trị của hàm số

Phương pháp chung:

Sử dụng hai quy tắc 1 và quy tắc 2 ở phần lý thuyết.

Ví dụ 1: Điểm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$ là

- A. $x = -1; x = 3$.
B. $x = -\frac{22}{3}; x = \frac{10}{3}$.
C. $x = -1; x = 5$.
D. $x = 4; x = 3$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$

Có TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = x^2 - 2x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			$\frac{10}{3}$			
	$-\infty$				$-\frac{22}{3}$	
						$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có điểm cực đại $x = -1$ và điểm cực tiểu $x = 3$.

Cách 2: Sử dụng MTCT.

Ta sẽ sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm của máy tính.

Ấn **SHIFT** **($\frac{d}{dx}$)** thì máy hiện như hình bên.

Nhập hàm số $\frac{1}{3}X^3 - X^2 - 3X + \frac{5}{3}$ tại giá trị $X = -1$ (Ta lần lượt thử các phương án).

Tại $x = -1$ thì $y' = 0$ suy ra $x = -1$ là một điểm cực trị của hàm số.

Tương tự ta giữ nguyên màn hình và thay $x = -1$ thành $x = 3$ thì được kết quả tương tự. Từ đó ta chọn A.

Ví dụ 2: Điểm cực trị của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ là

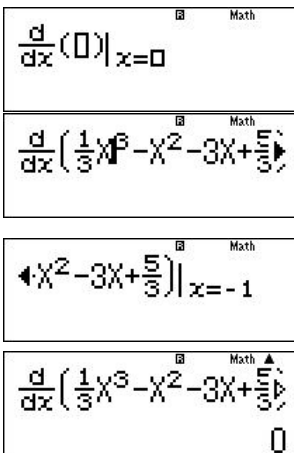
- A. $x = -1; x = -3$.
B. $x = 1; x = -3$.
C. $x = 0; x = 1$.
D. hàm số không có điểm cực trị.

Đáp án D.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có BBT:



Chú ý

Trong STUDY TIP trang 50 có chú ý rằng $y'(c) = 0$ thì $x = c$ chưa chắc đã là điểm cực trị của hàm số, do vậy ta cần thử xem y' có đổi dấu qua $x = c$ hay không.

STUDY TIP

Xét hàm số bậc ba
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

với $(a \neq 0)$ có

$$\Delta_{y'} = b^2 - 3ac$$

* Nếu $b^2 - 3ac > 0$ thì
 hàm số có hai cực trị.

* Nếu $b^2 - 3ac \leq 0$ thì
 hàm số không có cực trị.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

Từ BBT suy ra hàm số không có cực trị.

Nhận xét:

Từ ví dụ 1 và ví dụ 2 ta nhận thấy với hàm số bậc ba có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ thì khi tìm cực trị của hàm số ta nên giải bằng cách 1 (xét phương trình $y' = 0$) thay vì sử dụng máy tính bởi phương trình $y' = 0$ là phương trình bậc hai giải quyết nhanh chóng hơn việc bấm máy thử trường hợp, tham khảo STUDY TIP bên cạnh để suy luận nhanh trong bài toán này.

Ví dụ 3: Xét hai hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ và hàm số $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 - x^2 + \frac{5}{4}$.

Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A.** Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực đại là $A(1;2)$ và $B(-1;2)$.
- B.** Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu là $x=0$ và hàm số $g(x)$ có giá trị cực đại là $y = \frac{5}{4}$.
- C.** Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại, hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.
- D.** Hàm số $f(x)$ và hàm số $g(x)$ cùng có điểm cực tiểu là $x=0$.

Đáp án B.

Lời giải

Từ bài toán xét sự biến thiên tổng quát của hàm số bậc bốn trùng phương mà tôi đã giới thiệu ở phần trước thì ta có:

Hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ có $\frac{b}{a} = -2 < 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có ba

$$\text{nghiệm phân biệt là } \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{-\frac{b}{2a}} = -1. \\ x = \sqrt{-\frac{b}{2a}} = 1 \end{cases}$$

Kết hợp với lý thuyết trang 28, do $f(x)$ có hệ số $a = -1 < 0$ ta có nhanh bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$						

$-\infty \nearrow 2 \searrow 1 \nearrow 2 \searrow +\infty$

* Từ đây ta loại C do hàm số $f(x)$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

* Ta loại A do hàm số $f(x)$ có hai điểm cực đại là $x = -1$ và $x = 1$. Còn $A(-1; 2)$ và $B(1; 2)$ là hai điểm cực đại của đồ thị hàm số, chứ không phải của hàm số (xem lại chú ý đầu tiên (phần mở đầu chủ đề cực trị của hàm số) về phân biệt các khái niệm).

* Để loại một trong hai phương án B và D còn lại ta tiếp tục xét hàm số $g(x)$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -x^3 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$

Từ BBT ta loại D do $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số $g(x)$. Vậy ta chọn B.

Đối với hàm bậc bốn trùng phương dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

STUDY TIP

Đối với hàm bậc bốn trùng phương có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

thì nếu:

$ab \geq 0$ thì hàm số có một điểm cực trị là $x = 0$.

$ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị là

$$x = 0; x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}.$$

$$\text{Ta có } y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Số điểm cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2 + b = 0$.

- Nếu $\frac{b}{2a} < 0$ (tức a, b trái dấu) thì hàm số có ba điểm cực trị là $x = 0; x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$
- Nếu $\frac{b}{2a} \geq 0$ (tức a, b cùng dấu hoặc $b = 0$) thì hàm số có duy nhất một điểm cực trị là $x = 0$.

Tiếp tục là một bài toán áp dụng kết quả vừa thu được:

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.
- Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
- Hàm số có một cực đại và không có cực tiểu.
- Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Đáp án B.

Lời giải

Áp dụng kết quả vừa thu được ta có kết luận hàm số luôn có ba điểm cực trị do hai hệ số a, b trái dấu.

Mặt khác hệ số $a = -1 < 0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ M (mẹo nhớ), do vậy hàm số có hai điểm cực đại và một cực tiểu.

Đến đây ta tiếp tục thu được kết luận ở phần STUDY TIP.

Chú ý: Cần phân biệt rõ các khái niệm về “điểm cực trị của hàm số” và “cực trị của hàm số” để tránh nhầm lẫn.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- Hàm số có giá trị cực đại là $y = 25$ và giá trị cực tiểu là $y = -2$.
- Hàm số có duy nhất một điểm cực trị $x = -2$ là điểm cực đại.
- Đồ thị hàm số đã cho có một điểm cực tiểu là $A(-2; 25)$.

STUDY TIP

Đối với hàm bậc bốn trùng phương có dạng

$$y = ax^4 + bx^2 + c, \quad (a \neq 0) \text{ có}$$

$ab < 0$, khi đó nếu:

a. $a < 0$ thì $x = 0$ là điểm cực tiểu; $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$ là hai

điểm cực đại của hàm số.

b. $a > 0$ thì ngược lại $x = 0$

là điểm cực đại; $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$

là hai điểm cực tiểu của hàm số.

Đáp án C.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -4x^3 + 12x - 8; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	25	$+$	$+\infty$	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$. Từ đây ta chọn C.

Nhận xét: Đối với hàm bậc 4, vì đạo hàm là đa thức bậc 3 nên hàm chỉ có thể có một cực trị hoặc ba cực trị. Hàm số có một cực trị khi phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm hoặc 2 nghiệm (1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép), hàm số có 3 cực trị khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Từ ví dụ 5 ta thấy đạo hàm bằng 0 tại $x = 1$ nhưng qua điểm này y' không đổi dấu nên điểm $x = 1$ không phải là điểm cực trị của hàm số.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ và có bảng biến thiên phía dưới:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1	$+\infty$	-15	$-\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 4$.
- B. Hàm số có đúng một cực trị.
- C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng -15.

Đáp án C.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy có hai giá trị của x mà qua đó y' đổi dấu, đó là $x = 0$ và $x = 4$, do vậy đây là hai điểm cực trị của hàm số.

Ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$, do vậy $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số, ngược lại $x = 4$ lại là điểm cực đại của hàm số.

Từ đây ta loại được A, B.

D sai do đây là các giá trị cực trị, không phải giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Ta chọn C bởi tại $x = 0$ thì hàm số có giá trị cực tiểu là $y = 1$.

Ví dụ 7: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như dưới:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.
- B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.
- C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
- D. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

Đáp án A.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy có hai giá trị của x mà khi qua đó y' đổi dấu.

Do vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị đó là $x=1; x=2$.

Chú ý: Nhiều độc giả nghĩ rằng tại $x=2$ không tồn tại y' thì $x=2$ không phải là điểm cực trị của hàm số, đây là một sai lầm rất lớn. Bởi hàm số vẫn đạt cực trị tại điểm khiến cho đạo hàm không xác định.

Ví dụ: Hàm số $y=|x|$ có đạo hàm không tồn tại khi $x=0$ nhưng đạt cực tiểu tại $x=0$.

Ví dụ 8. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-3)$. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số có một điểm cực đại.
- B. Hàm số có hai điểm cực trị.
- C. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.
- D. Hàm số không có điểm cực trị.

Đáp án C.

Lời giải

$$\text{Ta thấy } f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Đến đây có nhiều độc giả kết luận luôn hàm số có hai điểm cực trị, tuy nhiên đó là kết luận sai lầm, bởi khi qua $x=1$ thì $f'(x)$ không đổi dấu, bởi $(x-1)^2 \geq 0, \forall x$. Do vậy hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị là $x=3$.

Ví dụ 9: Hàm số nào sau đây **không** có cực trị?

- A. $y=x^3-3x+1$.
- B. $y=\frac{2-x}{x+3}$.
- C. $y=x^4-4x^3+3x+1$.
- D. $y=x^{2n}+2017x \ (n \in \mathbb{N}^*)$.

Đáp án B.

Lời giải

Với A: Ta thấy đây là hàm bậc ba có $y'=3x^2-3$, phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt nên hàm số có hai điểm cực trị (loại).

Với B: Đây là hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên không có cực trị. Do đó ta chọn B.

Với C: Từ các kết quả về hàm số $y=ax^4+bx^2+c \ (a \neq 0)$ thì ta có kết luận rằng hàm số bậc bốn trùng phương luôn có điểm cực trị (do đồ thị hoặc dạng **M**; dạng **W** hoặc parabol).

Với D: Ta có $y'=2nx^{2n-1}+2017$ (phương trình luôn có nghiệm).

STUDY TIP

Ở quy tắc 1 ta có hàm số đạt cực trị tại điểm khiến cho đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

STUDY TIP

Trong đa thức, dấu của đa thức chỉ đổi khi qua nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ, còn nghiệm bội chẵn không khiến đa thức đổi dấu.

STUDY TIP

1. Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất không có cực trị.
2. Hàm bậc bốn luôn luôn có cực trị (có ba cực trị hoặc có duy nhất một cực trị).

Ví dụ 10: Hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

A. $y = x^4 + 2x^2 + 10$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

C. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 2$.

D. $y = 2x^4 - 4$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có thể loại luôn C bởi hàm số bậc ba chỉ có nhiều nhất là hai cực trị.

Tiếp theo ta đến với các hàm bậc bốn. Ta có hàm bậc bốn trùng phương có hai trường hợp, hoặc là có một điểm cực trị, hoặc là có ba điểm cực trị.

Đến đây ta có thể suy ra, nếu hệ số a, b khác dấu thì hàm số bậc bốn trùng phương có ba cực trị, do vậy ta chọn luôn được B.

Dạng 2

Tìm điều kiện để hàm số đã cho có điểm cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

2.1. Xét hàm số bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

Chú ý:

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên D có cực trị $\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

- Đạo hàm của hàm số tại x_0 phải bằng 0 hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0 .
- $f'(x)$ phải đổi dấu qua x_0 hoặc $f''(x_0) \neq 0$.

Một số lưu ý đối với cực trị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

- Để hàm số bậc ba có cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$$

- Ngược lại, để hàm số không có cực trị thì phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$

- Hoành độ $x_1; x_2$ của các điểm cực trị là các nghiệm của phương trình $y' = 0$.

- Để viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba, ta thường sử dụng phương pháp tách đạo hàm (xem bài toán tổng quát ở phía dưới).

Một số bài toán thường gặp:

Bài toán tổng quát 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$. Tìm điều kiện để:

- Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu (hay hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ trái dấu).
- Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu (hay hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ cùng dấu).
- Hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1; x = x_2$ so sánh với số thực α .
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị (điểm cực đại và điểm cực tiểu) nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng.

Lời giải tổng quát

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; phương trình $3ax^2 + 2bx + c = 0$ có $\Delta' = b^2 - 3ac$

a. Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$.

b. Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng

$$\text{dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \end{cases}$$

c. Điều kiện để hàm số có 2 cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$* x_1 < \alpha < x_2$$

$$* x_1 < x_2 < \alpha$$

$$* \alpha < x_1 < x_2$$

(tham khảo bảng trang 28; 29).

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, đồ thị hàm số bậc ba hoặc là có hai điểm cực trị, hoặc là không có điểm cực trị nào.

Chú ý

Phương trình $y' = 0$ ta xét ở đây có các hệ số lần lượt là $3a; 2b; c$ do vậy trong tất cả các bài toán tổng quát về hàm số bậc ba trong sách ta đều xét các hệ số này.

Ví dụ: $\Delta' = b^2 - 3ac$, ở đây $3a; 2b; c$ lần lượt là các hệ số của $y' = 0$ khác với biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ tổng quát mà ta vẫn ghi nhớ.

d. Điều kiện để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng phía, khác phía với một đường thẳng $\Delta: mx + ny + k = 0$

Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$.

* Nếu $(mx_1 + ny_1 + k)(mx_2 + ny_2 + k) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với Δ .

* Nếu $(mx_1 + ny_1 + k)(mx_2 + ny_2 + k) < 0$ thì A, B nằm khác phía so với Δ .

Một số trường hợp đặc biệt

- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba nằm cùng phía so với trục Oy
 $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba nằm về hai phía đối với trục Oy
 $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm cùng phía với trục $Ox \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CB} \cdot y_{CT} > 0$.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía với trục $Ox \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CB} \cdot y_{CT} < 0$.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cùng nằm về một phía trên đối với trục Ox
 $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CB} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CB} + y_{CT} > 0 \end{cases}$
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm cùng phía dưới với trục $Ox \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CB} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CB} + y_{CT} < 0 \end{cases}$

Bài toán tổng quát 2: Viết phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$.

Lời giải tổng quát

Giả sử hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có hai điểm cực trị là $x_1; x_2$.

Khi đó thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được $f(x) = Q(x) \cdot f'(x) + Ax + B$.

Khi đó ta có $\begin{cases} f(x_1) = Ax_1 + B \\ f(x_2) = Ax_2 + B \end{cases}$ (Do $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$).

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = Ax + B$.

STUDY TIP

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba biểu diễn theo $y'; y''; y$ là $g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$

Đến đây ta quay trở về với bài toán 1, vậy nhiệm vụ của chúng ta là đi tìm số dư đó một cách tổng quát.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c; y'' = 6ax + 2b$.

Xét phép chia y cho y' thì ta được:

$y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{b}{9a} \right) + g(x)$ (*), ở đây $g(x)$ là phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba.

Tiếp tục ta có (*) $\Leftrightarrow y = y' \cdot \frac{3ax + b}{9a} + g(x) \Leftrightarrow y = y' \cdot \frac{6ax + 2b}{18a} + g(x)$

$\Leftrightarrow y = y' \cdot \frac{y''}{18a} + g(x) \Rightarrow g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$

Một công thức khác về phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba là:

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$). Sau khi thực hiện phép chia tổng quát thì ta rút ra được công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba theo a, b, c, d là $y = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right)x + d - \frac{bc}{9a}$

Sau đây tôi xin giới thiệu một cách bấm máy tính để tìm nhanh phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba như sau:

Trước tiên ta xét ví dụ đơn giản:

Ví dụ 1: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ là

A. $26x + 9y - 15 = 0$.

B. $-25x + 9y - 15 = 0$.

C. $26x - 9y + 15 = 0$.

D. $25x - 9y + 15 = 0$.

Đáp án A.

Lời giải

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số được xác định bởi:

$$g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 - (3x^2 + 4x - 3) \cdot \frac{6x + 4}{18}$$

Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức bằng cách nhập:

MODE → **2:CMPLX**

Nhập vào máy tính biểu thức $g(x)$ như sau:

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 1 - (3X^2 + 4X - 3) \cdot \frac{6X + 4}{18}$$

Ấn **CALC**, gán X bằng i (ở máy tính i là nút **ENG**) khi đó máy hiện: $\frac{5}{3} - \frac{26}{9}i$.

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

$$y = \frac{5}{3} - \frac{26}{9}x \Leftrightarrow 26x + 9y - 15 = 0.$$

Tiếp theo ta có một bài tham số.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(1 - m)x + 1 + 3m$. Tìm m sao cho đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. $m \geq 0$; $\Delta: 2mx + y - 2m - 2 = 0$.

B. $m > 0$; $\Delta: 2mx + y - 2m - 2 = 0$.

C. $m < 0$; $\Delta: y = 202 - 200x$.

D. $m \geq 0$; $\Delta: y = 202 - 200x$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3(1 - m)$, $y'' = 6x - 6$.

Để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu thì $\Delta' = 3^2 - 9 \cdot (1 - m) > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Với $m > 0$ thì ta thực hiện:

Chuyển máy tính sang chế độ **MODE** **2:CMPLX**

STUDY TIP

Với những dạng toán này, ta lưu ý rằng trước tiên, ta cần tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị.

Nhập vào máy tính biểu thức $y - y' \cdot \frac{y''}{18a}$ ta có

$$X^3 - 3X^2 + 3(1-M)X + 1 + 3M - (3X^2 - 6X + 3(1-M)) \frac{6X-6}{18}$$

Ấn **CALC**

Máy hiện X? nhập $i =$

Máy hiện M? nhập 100 =

Khi đó máy hiện kết quả là $202 - 200i$

Ta thấy $202 - 200i = 2.100 + 2 - 2.100.i \Rightarrow y = 2m + 2 - 2mx$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có dạng $2mx + y - 2m - 2 = 0$.

Ta rút ra kết luận về cách làm dạng toán viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba này như sau:

STUDY TIP

Với bước cuối cùng, ta cần có kỹ năng khai triển đa thức sử dụng máy tính cầm tay, do khuôn khổ của sách nên tôi không thể giới thiệu vào sách. Vậy tôi mong quý độc giả đọc thêm về phần này.

Bước 1: Xác định $y'; y''$.

Bước 2: Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức:

MODE $\rightarrow$ **2:CMPLX**

Nhập biểu thức $y - y' \cdot \frac{y''}{18a}$.

Chú ý:

Nếu bài toán không chứa tham số thì ta chỉ sử dụng biến X trong máy, tuy nhiên nếu bài toán có thêm tham số, ta có thể sử dụng các biến bất kỳ trong máy để biểu thị cho tham số đã cho, ở trong sách này ta quy ước biến M để dễ định hình.

Bước 3: Gán giá trị.

Ấn **CALC**, gán X với i , gán M với 100.

Lúc này máy hiện kết quả, từ đó tách hệ số và i để đưa ra kết quả cuối cùng, giống như trong hai ví dụ trên.

Bài toán tổng quát 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$. Giả sử hàm số có hai điểm cực trị (một điểm cực đại, một điểm cực tiểu). Tìm khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Lời giải tổng quát

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Lúc này hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Ta có $d = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Áp dụng **bài toán tổng quát 2** ta có phương trình đi qua 2 điểm A; B là

$$\Delta: y = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right)x + d - \frac{bc}{9a}$$

Đặt $k = \frac{b^2 - 3ac}{9a} \Rightarrow \frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} = 2 \cdot \frac{3ac - b^2}{9a} = -2k$ thì $\Delta: y = -2kx + d - \frac{bc}{9a}$.

Lúc này ta có $AB^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + [-2k(x_1 - x_2)]^2$

$$\Leftrightarrow AB^2 = \left(\frac{-2b}{3a} \right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{3a} + 4k^2 \cdot \left[\left(\frac{-2b}{3a} \right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{3a} \right]$$

STUDY TIP

Cho hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a \neq 0$

Nếu $b^2 - 3ac > 0$ thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị

hàm số là $d = 2\sqrt{\frac{4k^3 + k}{a}}$

với $k = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$.

$$\Leftrightarrow AB^2 = \frac{4b^2 - 12ac}{9a^2} + 4k^2 \cdot \frac{4b^2 - 12ac}{9a^2} \Leftrightarrow AB^2 = \frac{4(b^2 - 3ac)}{a \cdot 9a} (1 + 4k^2)$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = \frac{4}{a} \cdot k \cdot (1 + 4k^2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{\frac{4k^3 + k}{a}} \text{ với } k = \frac{b^2 - 3ac}{9a}.$$

Ví dụ 1: Giá trị của m để $(C_m): y = x^3 + x^2 + (m+1)x - m^3 + m$ để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị (C_m) bằng $\frac{2\sqrt{85}}{27}$ là

A. $m = -2$. B. $m = -1$. C. $m = -4$. D. $m = -3$.

Đáp án B.

Lời giải

- Ta có $b^2 - 3ac = 1 - 3(m+1) = -3m - 2$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow -3m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{3}$

- Áp dụng công thức trong **bài toán tổng quát 3** thì ta có

$$2\sqrt{\frac{4 \cdot \left(\frac{-3m-2}{9}\right)^3 - \frac{3m+2}{9}}{1}} = \frac{2\sqrt{85}}{27}. \text{ Đến đây ta có thể nhập phương trình vào}$$

Trường hợp $m = -2$

Trường hợp $m = -1$

máy tính và thử các giá trị của m trong 4 phương án, từ đó ta chọn được B thỏa mãn.

Cách bấm máy tính: Nhập vào màn hình $\sqrt{4 \cdot \left(\frac{-3X-2}{9}\right)^3 - \frac{3X+2}{9} - \frac{\sqrt{85}}{27}}$ (do có

cùng thừa số chung là 2 nên ta bỏ 2 đi).

Thử với A: Ấn **CALC** **=** **2** **=** thì máy kết quả khác 0 nên ta loại A.

Thử với B: Tiếp tục ấn **CALC** **=** **1** **=** thì máy kết quả 0 nên ta chọn B.

STUDY TIP

Nếu đề yêu cầu hai điểm cực trị của đồ thị **cách đều đường thẳng d** thì chỉ cần một điều kiện là $I \in d$.

STUDY TIP

Điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0$ và nằm trên đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$).

Bài toán tổng quát 4: Định m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = kx + e$.

Lời giải tổng quát.

Do đồ thị hàm bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng nên lúc này điểm uốn $I(x_1; y_1)$ sẽ thuộc d và đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

vuông góc với d . Tức là m thỏa mãn hệ sau:
$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + e \\ \frac{2}{3} \cdot \left(c - \frac{b^2}{3a}\right) \cdot k = -1 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (với m là tham số) có đồ thị (C_m) . Tập tất cả các giá trị của m để hai điểm cực trị của đồ thị (C_m) đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$ là

A. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. B. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. C. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\}$. D. $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\}$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$. Để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = (-3m)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$y'' = 6x - 6m$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = m$. Lúc này điểm uốn I là điểm có tọa độ $(m; 2m^3)$.

Từ bài toán tổng quát ở trên ta có:

$$\begin{cases} 2m^3 = m \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{-(3m)^2}{3} \cdot 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (thỏa mãn đk).}$$

Ví dụ 2: Xác định tất cả các giá trị của m để hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đối xứng nhau qua đường thẳng $x - 2y - 5 = 0$.

A. $m = 0$.

B. $m = -2$.

C. $m \in \emptyset$.

D. $m = 2$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$; $y'' = 6x - 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Để ĐTHS có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Vậy điểm uốn $I(1; m - 2)$.

Từ bài toán tổng quát ở trên ta có: $\begin{cases} 1 - 2 \cdot (m - 2) - 5 = 0 \\ \frac{2}{3} \cdot \left(m - \frac{3^2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn đk).}$

Trên đây là 4 bài toán tổng quát đưa ra phương hướng công thức cụ thể cho các dạng bài hay gặp. Sau đây tôi xin đưa ra một số ví dụ khác không nằm trong 4 bài toán tổng quát trên, tuy nhiên các ví dụ dưới đây có chung một điểm là phương trình $y' = 0$ có thể tìm được rõ nghiệm $x_1; x_2$ theo tham số m .

Một số ví dụ khác

Ví dụ 1: Giá trị của m để đồ thị $(C_m): y = 2x^3 + 3(m - 3)x^2 + 11 - 3m$ có hai điểm cực trị A và B sao cho ba điểm $A; B; C(0; -1)$ thẳng hàng là

A. $m = 3$.

B. $m = 4$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Đáp án B.

Lời giải

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6(m - 3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 - m \end{cases}$.

Đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị A và B khi và chỉ khi $3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$

Áp dụng bài toán tổng quát 2 thì ta có phương trình đi qua hai điểm cực trị $A; B$ là $AB: y = -(m - 3)^2 x + 11 - 3m$.

Để A, B, C thẳng hàng thì $C(0; -1) \in AB: y = -(m - 3)^2 x + 11 - 3m$
 $\Leftrightarrow -1 = 11 - 3m \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn yêu cầu đề bài).

Ví dụ 2: Tất cả các giá trị của m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ có hai điểm cực trị trong đó A là điểm cực đại, B là điểm cực tiểu sao cho $OA = \sqrt{2}OB$ là

A. $m = 3 + 2\sqrt{2}$.

B. $m = -2 - 3\sqrt{2}; m = -2 + 3\sqrt{2}$.

C. $m = -3 - 2\sqrt{3}$.

D. $m = -3 + 2\sqrt{2}; m = -3 - 2\sqrt{2}$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $b^2 - 3ac = 9 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Suy ra đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Ta có $\Delta_{y'} = 9 \Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = m - 1; x_2 = m + 1 \Rightarrow x_1 < x_2$$

Vì hệ số $a = 1 > 0$ nên $x = x_1$ là điểm cực đại của hàm số và $x = x_2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

$$\Rightarrow A(m - 1; 2 - 2m) \text{ và } B(m + 1; -2 - 2m).$$

Theo đề ta có $OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow OA^2 = 2OB^2 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn yêu cầu đề bài).}$$

Ví dụ 3: Giá trị của m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 3mx + 1$ có hai điểm cực trị B, C sao cho tam giác ABC cân tại A với $A(2; 3)$ là

A. $m = 0; m = \frac{1}{2}$.

B. $m = 1; m = 2$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = 2$.

Đáp án C.

Lời giải

Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m > 0. \text{ Khi đó tọa độ hai điểm cực trị } B; C \text{ lần lượt là } B(-\sqrt{m}; 2\sqrt{m^3} + 1);$$

$$C(\sqrt{m}; -2\sqrt{m^3} + 1) \Rightarrow \overline{BC} = (2\sqrt{m}; -4\sqrt{m^3})$$

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0; 1)$.

$$\Delta ABC \text{ cân tại } A \Leftrightarrow \overline{AI} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow -4\sqrt{m} + 8\sqrt{m^3} = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = \frac{1}{2}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta có $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Giá trị của m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 4m - 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho ΔOAB vuông tại O là

A. $m = -1; m = 2$.

B. $m = 1; m = -2$.

C. $m = 1; m = -1$.

D. $m = -1; m = 0$.

Đáp án A.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \Rightarrow y = m - 3 \\ x = m - 1 \Rightarrow y = m + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(m + 1; m - 3) \\ B(m - 1; m + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{OA} = (m + 1; m - 3) \\ \overline{OB} = (m - 1; m + 1) \end{cases}$$

$$\text{Do tam giác } OAB \text{ vuông tại } O \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy $m = -1$ hoặc $m = 2$ là các giá trị cần tìm.

STUDY TIP

Sở dĩ trong bài toán này ta kết luận được $x = x_1$ là điểm cực đại của hàm số và $x = x_2$ là điểm cực tiểu của hàm số bởi ta dựa vào cách nhận dạng đồ thị hàm bậc ba có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và hệ số $a = 1 > 0$ thì đồ thị có dạng chữ N.

STUDY TIP

Khi giải các bài toán chứa tham số ta nên chú ý xem phương trình $y' = 0$ có thể giải ra nghiệm được hay không. Ta có một số kết quả sau:

1. Tổng các hệ số của các số hạng trong phương trình bằng 0 thì phương trình có một nghiệm $x = 1$.

2. Tổng các hệ số bậc chẵn và các hệ số bậc lẻ của các số hạng trong phương trình bằng nhau thì phương trình có một nghiệm $x = -1$.

3. Lưu ý xét $b^2 - 3ac$ để giải nghiệm phương trình $y' = 0$ nhanh hơn.

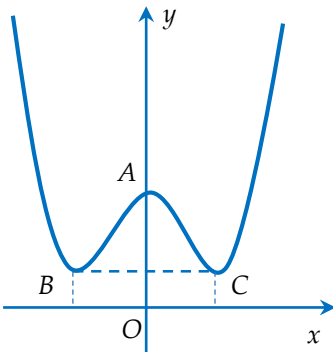
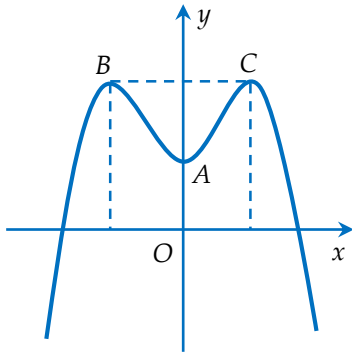
2.2. Xét hàm số bậc bốn trùng phương có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases}$

Đến đây ta có nhận xét hàm số **bậc bốn trùng phương luôn có điểm cực trị**.

Số điểm cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2 + b = 0$.

- Nếu $\frac{-b}{2a} \leq 0$ tức là a, b cùng dấu hoặc $b = 0$ thì phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0$. Khi đó hàm số chỉ có một điểm cực trị là $x = 0$.
- Nếu $\frac{-b}{2a} > 0$ tức là a, b trái dấu thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Nghĩa là hàm số có ba điểm cực trị là $x = 0; x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$.



Ta vừa chứng minh ở trên, nếu $ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị là

$$x = 0; x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}.$$

Khi đó đồ thị hàm số đã cho sẽ có ba điểm cực trị là:

$$A(0; c); B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right); C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac \text{ (Hình minh họa)}$$

(Chứng minh: ta có $f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) = a\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^4 + b\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2 + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$
 $= \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2} = \frac{-ab^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ (đpcm))

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

Bài toán 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông.

Lời giải tổng quát

Với $ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do điểm $A(0; c)$ luôn nằm trên Oy và cách đều hai điểm B, C nên tam giác ABC phải vuông cân tại A . Điều này tương đương với $AB \perp AC$ (do $AB = AC$ có sẵn rồi).

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a}\right); \overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a}\right)$

Do $AB \perp AC$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{a} = -8$

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông chỉ cần điều kiện là $\frac{b^3}{a} = -8$.

Ví dụ 1: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8m^2x^2 + 3$ có 3 điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

- A. $\{0\}$. B. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. C. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. D. $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Đáp án D.

Cách 1: Lời giải thông thường	Cách 2: Áp dụng công thức
TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 4x(x^2 - 4m^2)$. Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$. Lúc đó, ba điểm cực trị là: $A(2m; -16m^4 + 3)$, $B(0; 3)$, $C(-2m; -16m^4 + 3)$ Nên $BA = BC$. Do đó, tam giác ABC cân tại B Khi đó, tam giác ABC vuông cân khi và chỉ khi: $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 256m^8 = 0$ $\Leftrightarrow 1 - 64m^6 = 0 \quad (m \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$	Để các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông cân thì $\frac{b^3}{a} = -8 \Leftrightarrow \frac{(-8m^2)^3}{1} = -8$ $\Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$

Nhận xét: Rõ ràng việc nhớ công thức và làm nhanh hơn rất nhiều so với việc suy ra từng trường hợp một.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

2. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (C_m). Giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông cân thuộc khoảng nào sau đây.

- A. $\left(\frac{4}{7}; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{21}{10}\right)$. C. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. D. $(-1; 0)$.

3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^4 + (m-2015)x^2 + 2017$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

- A. $m = 2017$. B. $m = 2014$. C. $m = 2016$. D. $m = 2015$.

4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(m+2016)x^2 - 2017m + 2016$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

- A. $m = -2017$. B. $m = 2017$. C. $m = -2018$. D. $m = 2015$.

5. Tìm m để đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông.

- A. $m = 2$. B. $m = -1$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Đáp án

1.A	2.A	3.A	4.A	5.C
-----	-----	-----	-----	-----

STUDY TIP

Độc giả nên làm các bài tập rèn luyện này mà không nhìn lại công thức để có thể ghi nhớ công thức lâu hơn.

Bài toán 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều thì $\frac{b^3}{a} = -24$.
Mà tam giác vuông thì $\frac{b^3}{a} = -8$.
“Vuông -8, đều -24”

Lời giải tổng quát

Với $ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do $AB = AC$, nên ta chỉ cần tìm điều kiện để $AB = BC$.

Mặt khác ta có

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

$$\text{Do vậy } AB = BC \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} = -\frac{2b}{a} \Leftrightarrow \boxed{\frac{b^3}{a} = -24}$$

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

- A. $m = 3$. B. $m = 0$. C. $m > 0$. D. $m = \sqrt[3]{3}$.

Đáp án D.

Lời giải

Áp dụng công thức vừa chứng minh ở trên ta có

$$\frac{b^3}{a} = -24 \Leftrightarrow \frac{(-2m)^3}{1} = -24 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}.$$

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5 (C_m)$. Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều?

- A. $m = 2 - \sqrt[3]{3}$. B. $m = 2 + \sqrt[3]{3}$. C. $m = 5 - 2\sqrt[3]{3}$. D. $m = 5 + 2\sqrt[3]{3}$.

2. Cho hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m-2017)x^2 - 2016$ có đồ thị (C_m) . Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

- A. $m = 2015$. B. $m = 2016$. C. $m = 2017$. D. $m = -2017$.

3. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

- A. $m = \sqrt[3]{3}$. B. $m = -\sqrt[3]{3}$. C. $m = \sqrt{3}$. D. $m = -\sqrt{3}$.

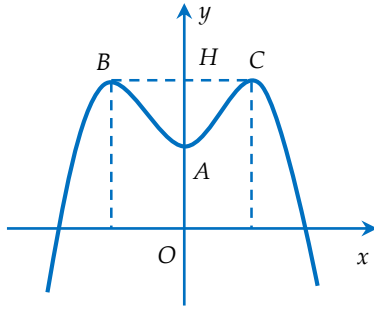
4. Cho hàm số $y = -mx^4 + 2mx^2 - m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

- A. $m = \sqrt{3}; m = -\sqrt{3}; m = 0$. B. $m = -\sqrt{3}; m = \sqrt{3}$.
C. $m = 0$. D. $m = \sqrt{3}$.

Đáp án

1.A	2.B	3.A	4.B
-----	-----	-----	-----

Bài toán 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng S_0 .



Lời giải tổng quát

Gọi H là trung điểm của BC thì lúc này H nằm trên đường thẳng chứa đoạn thẳng BC (hình vẽ).

Lúc này $H\left(0; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(0; -\frac{b^2}{4a}\right)$. Diện tích tam giác ABC được tính bằng

$$\text{công thức: } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \Rightarrow S_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{b^2}{4a}\right)^2 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow S_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^4}{16a^2} \cdot \frac{-2b}{a} \Leftrightarrow S_0^2 = \frac{-b^5}{32a^3}$$

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích là S_0 thì có điều kiện

$$\text{là } S_0^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4?

- A. $m = \sqrt[5]{16}$. B. $m = 16$. C. $m = \sqrt[3]{16}$. D. $m = -\sqrt[3]{16}$.

Đáp án A.

Lời giải

Áp dụng công thức ở trên ta có, hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4 $\Leftrightarrow 32 \cdot a^3 S_0^2 + b^5 = 0 \Leftrightarrow 32 \cdot 1^3 \cdot 4^2 + (-2m)^5 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{16}$.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32?

- A. $m = 2$; $m = -2$. B. $m = 0$; $m = 2$.
C. $m = 0$; $m = -2$. D. $m = 2$; $m = -2$; $m = 0$.

2. Cho hàm số $y = f(x) = -x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

- A. $m = 3$. B. $m = \pm 3$. C. $m = 2$. D. $m = \pm 2$.

3. Cho hàm số $y = 3x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 3.

- A. $m = 3$. B. $m = -3$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

4. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - m - 1$ (1), với m là tham số thực. Xác định m để hàm số (1) có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Đáp án

1.A	2.A	3.A	4.B
-----	-----	-----	-----

STUDY TIP

Để tìm max, ta thường sử dụng các BĐT thường gặp như: BĐT Cauchy, BĐT Bunyakovsky hay sử dụng phương pháp hàm số.

Bài toán 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

Lời giải tổng quát

Ở bài toán 3 ta có $S_0^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$.

Do vậy ta chỉ đi tìm $\max\left(\frac{-b^5}{32a^3}\right)$

Bài toán 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị $A; B; C$ tạo thành tam giác ABC trong đó $B; C \in Ox$.

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab < 0$.

Tam giác ABC có hai điểm cực trị $B; C \in Ox \Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$

Bài toán 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị $A; B; C$ tạo thành tam giác ABC trong đó $BC = kAB = kAC; (k > 0)$.

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab < 0$.

Từ bài toán tổng quát ban đầu ta có $A(0; c); B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right); C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Ta có $BC = kAB \Leftrightarrow 2\sqrt{-\frac{b}{2a}} = k\sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}} \Leftrightarrow b^3k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$

Bài toán 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có góc ở đỉnh cân bằng α .

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab < 0$.

Cách 1:

Ta có $\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} - AB^2 \cdot \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \left(-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}\right) \cdot \cos \alpha = 0$

$\Leftrightarrow 8a + b^3 + (8a - b^3) \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$

Cách 2:

Gọi H là trung điểm của BC , tam giác AHC vuông tại H có:

$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{HC}{AH} = \frac{BC}{2AH} \Rightarrow BC^2 - 4 \cdot AH^2 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow 8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có góc ở đỉnh là α thì có điều kiện là $\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$
Hoặc $8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có ba góc nhọn thì $b(b^3 + 8a) > 0$.

Bài toán 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có ba góc nhọn.

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab < 0$.

Do tam giác ABC là tam giác cân nên hai góc ở đáy bằng nhau. Một tam giác không thể có hai góc tù, do vậy hai góc ở đáy của tam giác ABC luôn là góc nhọn. Vì thế cho nên để tam giác ABC là tam giác có ba góc nhọn thì góc ở đỉnh phải là góc nhọn. Tức là tìm điều kiện để $\widehat{BAC} = \alpha$ là góc nhọn.

Ở bài toán trên ta vừa tìm được $\cos \widehat{BAC} = \cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$.

Để góc $\widehat{BAC}$ nhọn thì $\frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} > 0$

Cách khác để rút gọn công thức:

Do $\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$ nên để α là góc nhọn thì $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} > 0$.

Mà $|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| > 0$ do đó $\overline{AB} \cdot \overline{AC} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} > 0 \Leftrightarrow b(b^3 + 8a) > 0$

Bài toán 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp là r .

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab < 0$.

Ta có $S_0 = p \cdot r$ (công thức tính diện tích tam giác theo bán kính đường tròn nội tiếp).

$$\Rightarrow r = \frac{2S_0}{AB + AC + BC} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{b^5}{32a^3}}}{2\sqrt{-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}} + 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}} \Leftrightarrow r = \frac{b^2}{4|a| \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$$

Bài toán 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R .

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab < 0$.

Trước tiên ta có các công thức sau: $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$

Gọi H là trung điểm của BC , khi đó AH là đường cao của tam giác ABC , nên

$$\frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Leftrightarrow 4R^2 \cdot AH^2 = AB^4$$

$$\Leftrightarrow 4R^2 \cdot \frac{b^4}{16a^2} = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}\right)^2 \Leftrightarrow R = \frac{b^3 - 8a}{8|a| \cdot b}$$

Bài toán 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác

- a. có độ dài $BC = m_0$.
b. có $AB = AC = n_0$.

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab < 0$.

Ở ngay đầu **Dạng 3** ta đã có các công thức

$$A(0; c); B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right); C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

Do vậy ở đây với các ý a, b ta chỉ cần sử dụng hai công thức này. Đây là hai công thức quan trọng, việc nhớ công thức để áp dụng là điều cần thiết!

Bài toán 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác

- a. nhận gốc tọa độ O là trọng tâm.
b. nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.
c. nhận gốc tọa độ O làm tâm đường tròn ngoại tiếp.
d. cùng với gốc tọa độ O tạo thành một hình bình hành (hình thoi).
e. cùng với điểm $M(x_0; y_0)$ tạo thành một tứ giác nội tiếp đường tròn.

Lời giải tổng quát

a. Nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

a. Ở công thức vừa nhắc lại ở bài toán 9, ta có tọa độ các điểm A, B, C thì chỉ cần áp dụng công thức $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

$$\text{Lúc này ta có } \begin{cases} 0 + \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) + \sqrt{-\frac{b}{2a}} = 3 \cdot 0 \\ c + \left(-\frac{b^2}{4a}\right) + c + \left(-\frac{b^2}{4a}\right) + c = 3 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{b^2}{2a} + 3c = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 6ac = 0$$

b. Nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

Do tam giác ABC cân tại A , mà A nằm trên trục Oy nên AO luôn vuông góc với BC . Do vậy để O là trực tâm của tam giác ABC thì ta chỉ cần tìm điều kiện để $OB \perp AC$ hoặc $OC \perp AB$.

$$OB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b^2c}{4a} = 0 \Leftrightarrow b^4 + 8ab - 4ab^2c = 0$$

$$\Leftrightarrow b^3 + 8a - 4abc = 0$$

STUDY TIP

Với những dạng toán này, lưu ý ta luôn có tam giác ABC cân tại A , nên ta chỉ cần tìm một điều kiện là có đáp án của bài toán.

c. Nhận O làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

Để tam giác ABC nhận tâm O làm tâm đường tròn ngoại tiếp thì $OA = OB = OC$.
Mà ta luôn có $OB = OC$, do vậy ta chỉ cần tìm điều kiện cho

$$OA = OB \Leftrightarrow c^2 = -\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \frac{2b^2c}{4a} + c^2 \Leftrightarrow b^4 - 8ab^2c - 8ab = 0$$

$$\Leftrightarrow b^3 - 8a - 8abc = 0$$

d. Cùng với gốc tọa độ O tạo thành một hình bình hành (hình thoi).

Để $ABOC$ là hình bình hành thì $\overline{AB} = \overline{CO}$, mà

$$\begin{cases} \overline{AB} = \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a} \right) \\ \overline{CO} = \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \frac{\Delta}{4a} \right) \end{cases}$$

Từ đó ta có $-\frac{b^2}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow \frac{b^2}{2a} = c \Leftrightarrow b^2 = 2ac$

e. Cùng với điểm $M(x_0; y_0)$ tạo thành một tứ giác nội tiếp đường tròn.

Ta viết được phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$$(C): x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c \right) y + c \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} \right) = 0$$

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên đường tròn (C) , tức là tọa độ của điểm M thỏa mãn đường tròn (C) hay

$$x_0^2 + y_0^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c \right) y_0 + c \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} \right) = 0.$$

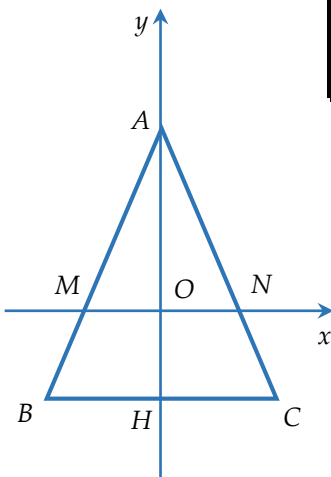
Bài toán 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải tổng quát

Gọi M, N là giao điểm của AB, AC với trục hoành, kí hiệu như hình vẽ.

Ta có $\Delta ANM \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{OA}{AH} \right)^2 = \frac{1}{2}$ (Do trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau).

$$\Rightarrow AH = \sqrt{2}OA \Leftrightarrow b^2 = 4\sqrt{2}|ac|$$



2.3. Xét hàm phân thức

Trước tiên ta xét bài toán liên quan đến cực trị hàm phân thức nói chung. Ta có một kết quả khá quan trọng như sau:

Xét hàm số dạng $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ xác định trên D thì ta có

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Điểm cực trị của hàm số này là nghiệm của phương trình

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} = 0$$

STUDY TIP

Lưu ý công thức $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)}{v'(x)}$ để giải quyết các bài toán một cách nhanh gọn hơn.

$$\Leftrightarrow u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)}{v'(x)}}$$

Nhận xét: Biểu thức trên được thỏa mãn bởi các giá trị là cực trị của hàm số đã cho. Do đó, thay vì tính trực tiếp tung độ của các điểm cực trị, ta chỉ cần thay vào biểu thức đơn giản hơn sau khi đã lấy đạo hàm cả tử lẫn mẫu. Vận dụng tính chất này, ta giải quyết được nhiều bài toán liên quan đến điểm cực trị của hàm phân thức.

Ví dụ: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm

$$số y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}, a \neq 0, a' \neq 0.$$

Hướng dẫn giải

Theo công thức vừa nêu ở trên thì ta lần lượt tìm biểu thức đạo hàm của tử số và mẫu số.

Suy ra $y = \frac{2ax + b}{a'}$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (nếu

có) của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}, a \neq 0, a' \neq 0.$



Bài đọc thêm:

Phương pháp sử dụng máy tính cầm tay để giải nhanh các bài tập định tham số m để hàm $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0

Cách 1: Sử dụng TABLE

Cách làm: Ta sử dụng tính năng bảng giá trị TABLE của máy tính để nghiên cứu nhanh đáng điệu của đồ thị trên đoạn $(x_0 - 0,5; x_0 + 0,5)$ với 4 giá trị tham số mà đề cho.

Ta lần lượt gán 4 giá trị ở phần đáp án cho A, B, C, D bằng lệnh gán giá trị SHIFT STO.

Do chức năng TABLE của máy tính cầm tay Fx 570 VN Plus có thể chạy được 2 hàm số $f(x)$ và $g(x)$ nên một lần thử ta thử được 2 phương án. Do vậy, cả bài toán ta chỉ cần thử hai lần.

Ví dụ 1: Với giá trị nào của tham số thực m thì hàm số

$$y = \frac{x^3}{3} - 2mx^2 + 3m^2x - 3m$$

đạt cực tiểu tại $x = -1$?

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{1}{3}$. D. $m = -\frac{1}{3}$.

Đáp án A.

Lời giải

Lần lượt gán 4 giá trị của m ở 4 phương án A, B, C, D cho các biến A, B, C, D trên máy bằng lệnh SHIFT STO như sau:

Ấn $\left(\leftarrow\right)$ **1** **SHIFT** **RCL** **(STO)** $\left(\leftarrow\right)$ **A**.

Tương tự với các phương án còn lại.

Ấn **MODE** **7**: TABLE

Nhập hàm $f(x) = \frac{X^3}{3} - 2AX^2 + 3A^2X - 3A$. (là hàm số đã cho khi $m = -1$ ở phương án A). Sau đó ấn =, máy hiện $g(x) =$ ta nhập

$$g(x) = \frac{X^3}{3} - 2BX^2 + 3B^2X - 3B \text{ ấn } =$$

Start? Chọn $-1 - 0,5$

End? Chọn $-1 + 0,5$

STEP? Chọn 0,1.

Máy sẽ hiện bảng giá trị của hàm số đã cho trong hai trường hợp ở phương án A và B như sau:

M	X	F(X)	G(X)
1	-1.5	1.875	-13.12
2	-1.4	1.8053	-12.03
3	-1.3	1.7476	-11.01
			-1.5

M	X	F(X)	G(X)
4	-1.2	1.704	-10.05
5	-1.1	1.6763	-9.163
6	-1	1.6666	-8.333
			-1

M	X	F(X)	G(X)
7	-0.9	1.677	-7.563
8	-0.8	1.7093	-6.85
9	-0.7	1.7656	-6.194
			-0.7

STUDY TIP

Ở bài dạng này, ta chỉ cần để ý xem giá trị của hàm số thay đổi như thế nào khi qua $x = x_0$.

Ta thấy ở trường hợp $F(x)$ tức là trường hợp phương án A. Từ $x = -1,5$ chạy đến $x = -1$ thì giá trị của hàm số giảm, từ $x = -1$ đến $x = -0,7$ thì giá trị của hàm số tăng, tức là hàm số nghịch biến trên $(-1,5; -1)$ và đồng biến trên $(-1; -0,7)$.

Vậy $x = -1$ là điểm cực tiểu của hàm số, vậy A thỏa mãn. Ta chọn A mà không cần xét B, C, D.

Ví dụ áp dụng:

Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^3 - 3mx + 2m$ đạt cực đại tại $x = 2$?

A. $m = 4$

B. $m = -4$

C. $m = 0$

D. Không có giá trị của m .

Đáp án D.

Cách 2: Sử dụng chức năng $\frac{d}{dx}$.

Cách làm: Thử các giá trị của tham số m ở các phương án, xem phương án nào làm đạo hàm bằng 0, nếu có nhiều phương án cùng làm đạo hàm bằng 0, thì ta xét đến y'' .

The first screenshot shows the input of the derivative function: $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} - 2MX^2 + 3M^2X - 3M \right)$. The second screenshot shows the result of the derivative evaluated at $x = -1$: $(X^2 + 3M^2X - 3M) \Big|_{x=-1}$.

Cũng xét ví dụ 1 ở trên thì ta có:

Sử dụng nút SHIFT $\left(\frac{d}{dx} \right)$, nhập vào máy như sau:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{X^3}{3} - 2MX^2 + 3M^2X - 3M \right) \Big|_{X=-1}$$

Tiếp theo ấn CALC nhập $X = -1$; $M = -1$, máy hiện bằng 0, thỏa mãn. Chọn A.

Chú ý: Ở cách làm này, ta cần lưu ý các trường hợp $f'(x_0) = 0$ nhưng x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Xem đáp án chi tiết tại trang 209

Dạng 1: Các dạng tính toán thông thường liên quan đến cực trị

Câu 1: Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 + 100$ là:

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 2: Hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 2017$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 8x + 5$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2 . Hỏi tổng $x_1 + x_2$ là bao nhiêu?

- A. $x_1 + x_2 = 8$. B. $x_1 + x_2 = -8$.
C. $x_1 + x_2 = 5$. D. $x_1 + x_2 = -5$.

Câu 4: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm:

$$f'(x) = (x-1)^2(x-3).$$

- Phát biểu nào sau đây là đúng?
A. Hàm số có một điểm cực đại.
B. Hàm số có hai điểm cực trị.
C. Hàm số có đúng một điểm cực trị.
D. Hàm số không có điểm cực trị.

Câu 5: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có điểm cực đại là:

- A. $I(2; -3)$. B. $I(0; 1)$. C. $I(0; 2)$. D. Đáp án khác.

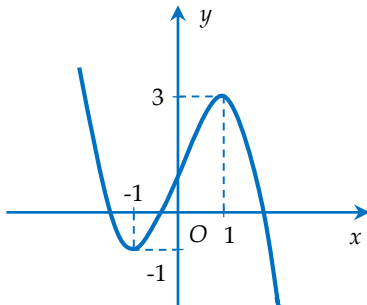
Câu 6: Hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 2017$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
B. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.
D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, các khẳng định sau khẳng định nào là đúng?



- A. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 và đạt giá trị lớn nhất bằng 3 .
B. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(-1; -1)$ và điểm cực đại $B(1; 3)$.
C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1 .
D. Hàm số đạt cực tiểu tại $A(-1; -1)$ và cực đại tại $B(1; 3)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		+	+	-	+
y	$3 \nearrow +\infty$		$2 \nearrow -\infty$	$2 \searrow -\infty$	$-3 \nearrow +\infty$

Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

- A. Hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng vẫn đạt cực trị tại $x = 0$.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -1$ và $x = 1$.
D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -3$ và $y = 3$.

Câu 10: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số $y = 2x - \frac{1}{x+1}$ có hai điểm cực trị.
B. Hàm số $y = 3x^3 + 2016x + 2017$ có hai điểm cực trị.
C. Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có một điểm cực trị.
D. Hàm số $y = -x^4 - 3x^2 + 2$ có một điểm cực trị.

Câu 11: Số điểm cực trị của hàm số $y = |x|^3 - 4x^2 + 3$ bằng:

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 4.

Câu 12: Hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại:

- A. $x = -1$. B. $x = 0$. C. $x = -2$. D. $x = 1$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0		$+\infty$	
	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có đúng hai cực trị.
B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 hoặc 1 .
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 14: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt cực trị tại các điểm nào sau đây?

- A. $x = \pm 2$. B. $x = \pm 1$.
C. $x = 0; x = 2$. D. $x = 0; x = 1$.

Câu 15: Hệ thức liên hệ giữa giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^3 - 2x$ là:

- A. $y_{CT} + y_{CD} = 0$. B. $2y_{CT} = 3y_{CD}$.
C. $y_{CT} = 2y_{CD}$. D. $y_{CT} = y_{CD}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		1	2	1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $M(0; 2)$ được gọi là điểm cực đại của hàm số.
 B. $f(-1)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số.
 C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
 D. $x_0 = 1$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 17: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ (C). Đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là:

- A. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.
 C. $y = x + 3$. D. $x - 2y - 3 = 0$.

Câu 18: Tính khoảng cách giữa các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 2x^4 - \sqrt{3}x^2 + 1$.

- A. $2\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt[4]{3}$.

Câu 19: Tìm tất cả các điểm cực đại của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

- A. $x = \pm 1$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 0$.

Câu 20: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$

- A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.
 B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.
 C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
 D. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu là 0.
 B. Hàm số có hai giá trị cực tiểu là $-\frac{2}{3}$ và $-\frac{5}{48}$.
 C. Hàm số chỉ có một giá trị cực tiểu.
 D. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\frac{2}{3}$ và giá trị cực

đại là $-\frac{5}{48}$.

Câu 22: Cho hàm số $y = (x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào dưới đây?

- A. $2x + y + 4 = 0$. B. $2x + y - 4 = 0$.
 C. $2x - y - 4 = 0$. D. $2x - y + 4 = 0$.

Câu 23: Cho hàm số f có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)^2(x+2)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số f là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		0		$+\infty$	
	$-\infty$		-4		

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **SAI**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
 C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
 B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.
 C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.

Câu 26: Kết luận nào sau đây về cực trị của hàm số $y = x5^{-x}$ là đúng?

- A. Hàm số có điểm cực đại là $x = \frac{1}{\ln 5}$.
 B. Hàm số không có cực trị.
 C. Hàm số có điểm cực tiểu là $x = \frac{1}{\ln 5}$.
 D. Hàm số có điểm cực đại là $x = \ln 5$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		0	3	0	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

- A. Hàm số có ba điểm cực trị.
 B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
 C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
 D. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

Câu 28: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

- A. $P(1; 0)$. B. $M(0; -1)$.
 C. $N(1; -10)$. D. $Q(-1; 10)$.

Dạng 2: Tìm điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 29: Với giá trị nào của m thì hàm số

$$y = x^3 - m^2x^2 - (4m-3)x - 1 \text{ đạt cực đại tại } x=1?$$

- A. $m=1$ và $m=-3$. B. $m=1$.
C. $m=-3$. D. $m=-1$.

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m + 1$ có 2 điểm cực trị.

- A. $m > 0$. B. $m < 0$. C. $m \geq 0$. D. $m \neq 0$.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

- A. -3 . B. 3 . C. $-\frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 32: Tìm m để hàm số:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 + m - 1)x + 1$$

đạt cực trị tại 2 điểm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 + x_2| = 4$.

- A. $m = \pm 2$. B. $m = -2$.
C. Không tồn tại m . D. $m = 2$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - 3mx + 1$ đạt cực trị tại điểm $x_0 = 1$.

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có đúng một điểm cực trị.

- A. $m \geq 0$. B. $m > 0$. C. $m \leq 0$. D. $m < 0$.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax + 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn: $(x_1^2 + x_2 + 2a)(x_2^2 + x_1 + 2a) = 9$.

- A. $a = 2$. B. $a = -4$. C. $a = -3$. D. $a = -1$.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 12x$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.

- A. $m = -9$. B. $m = 2$.
C. Không tồn tại m . D. $m = 9$.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 2)x^2 + 2$ có hai cực tiểu và một cực đại.

- A. $m < -\sqrt{2}$ hoặc $0 < m < \sqrt{2}$.
B. $-\sqrt{2} < m < 0$.
C. $m > \sqrt{2}$.
D. $0 < m < \sqrt{2}$.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

- A. $m = \frac{1}{\sqrt{4}}$. B. $m = 3$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

- A. $m = \sqrt[3]{3}$. B. $m = 1 - \sqrt[3]{3}$.
C. $m = 1 + \sqrt[3]{3}$. D. $m = -\sqrt[3]{3}$.

Câu 40: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(m-1)x^2 + 2m - 5$ có ba điểm cực trị lập thành tam giác đều.

- A. $m = 1$. B. $m = 1 - \sqrt[3]{3}$.
C. $m = 1 + \sqrt[3]{3}$. D. $m = 1 - \sqrt{3}$.

Câu 41: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

Câu 42: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

- A. $m = \sqrt[5]{4}$. B. $m = 16$.
C. $m = \sqrt[5]{16}$. D. $m = -\sqrt[5]{16}$.

Câu 43: Đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi m có giá trị là:

- A. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$. B. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.
C. $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$. D. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$.

Câu 44: Cho hàm số:

$$y = -2x^3 + (2m-1)x^2 - (m^2-1)x + 2.$$

Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có hai điểm cực trị?

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + x^2 - (2m+1)x + 4$ có đúng hai cực trị.

- A. $m < \frac{4}{3}$. B. $m > -\frac{2}{3}$. C. $m < -\frac{2}{3}$. D. $m > -\frac{4}{3}$.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+5)x^2 + mx$ có cực đại, cực tiểu và

$$|x_{CD} - x_{CT}| = 5.$$

- A. $m = 0$. B. $m = -6$.
C. $m \in \{6; 0\}$. D. $m \in \{0; -6\}$.

Câu 47: Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 2 điểm cực trị là $(-1; 18)$ và $(3; -16)$. Tính $a + b + c + d$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = x^2 + \ln(x - m)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng hai điểm cực trị.

- A. $|m| > \sqrt{2}$. B. $m > \frac{9}{4}$.
C. $m < -\sqrt{2}$. D. $m > \sqrt{2}$.

Câu 49: Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ có hai điểm cực trị là $A(0; 1)$ và $B(-1; 2)$. Tính giá trị của $a + b + c$.

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 6.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = (1 - m)x^3 - 3x^2 + 3x - 5$ có cực trị.

- A. $m < 1$. B. $m > -1$.
C. $0 < m \neq 1$. D. $m > 0$.

Câu 51: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m - 1)x - 1$. Tìm mệnh đề **sai**.

- A. $\forall m < 1$ thì hàm số có hai điểm cực trị.
B. Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.
C. $\forall m \neq 1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu.
D. $\forall m > 1$ thì hàm số có cực trị.

Câu 52: Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 1$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

- A. $-3 < m < 0$. B. $0 < m < 3$.
C. $m < -3$. D. $3 < m$.

Câu 53: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = \frac{3}{4}$.
C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{4}$.

Câu 54: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. B. $m = -1; m = 1$.
C. $m = 1$. D. $m \neq 0$.

Câu 55: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

- A. $m < 1$. B. $0 < m < 1$.
C. $m > 0$. D. $0 < m < \sqrt[3]{4}$.

Câu 56: Tất cả giá trị của m để hàm số $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - (2m - 1)x^2 + (1 - 4m)x + 1$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ sao cho $3x_1 + x_2 = 4$ là

- A. $m = \frac{2}{3}; m = 2$. B. $m = 0; m = \frac{1}{2}$.
C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{4}$.

Câu 57: Điều kiện của m để hàm số:

$$(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$$

có cực trị trong khoảng $(1; +\infty)$ là

- A. $m \geq 1$. B. $m > 1$. C. $m > 0$. D. $m \leq 0$.

Câu 58: Tìm m để đồ thị:

$$(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$$

có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị là nhỏ nhất?

- A. $m = 0$. B. $m = -1$. C. $m = 5$. D. $m = 2$.

Câu 59: Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại, cực tiểu mà các cực đại, cực tiểu tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

- A. $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

Câu 60: Tìm m để

$$(C_m): y = x^4 + 2(m - 2)x^2 + m^2 - 5m + 5$$

có cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác đều?

- A. $m = 2; m = 2 - \sqrt[3]{3}$. B. $m = 2$.
C. $m = 2 - \sqrt[3]{3}; m = 2 + \sqrt[3]{3}$. D. $m = 2 - \sqrt[3]{3}$.

Câu 61: Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị $A; B; C$ sao cho đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có bán kính bằng 1?

- A. $m = 1; m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
B. $m = 1; m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.
C. $m = 0; m = 1$.
D. $m = 2; m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

III. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

A. Lý thuyết về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

1. Định nghĩa

Ở phần A, chúng ta đã được giới thiệu về giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số. Vậy sự khác nhau giữa giá trị cực đại và giá trị lớn nhất (hay giá trị cực tiểu và giá trị nhỏ nhất) là gì? Ta sẽ trả lời ngay ở dưới đây.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

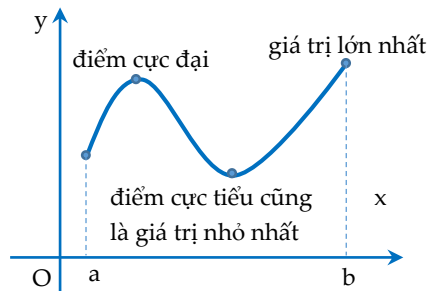
a. Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max_D f(x)$.

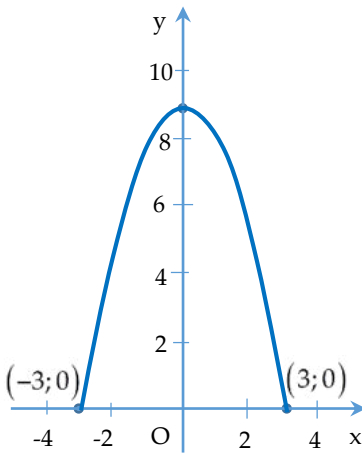
b. Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu $m = \min_D f(x)$.

Đến đây, ta có thể kết luận: Giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số được xét trên vùng lân cận với điểm cực trị, vì vậy cho nên thường được gọi là “cực trị địa phương”, còn giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số được xét trên toàn miền và được gọi là cực trị toàn cục. Ví dụ cụ thể khi thể hiện giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) và điểm cực đại, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số được thể hiện ở hình 1.13.



Hình 1.13



Hình 1.14

Ta thấy giá trị cực đại và giá trị lớn nhất của hàm số khác nhau. Điểm cực đại nằm giữa khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến, còn giá trị lớn nhất là tung độ của điểm “cao nhất” của đồ thị hàm số trên $[a; b]$. Chú ý rằng, ở hình 1.13, giá trị lớn nhất của hàm số có thể nằm ở điểm đầu mút của $[a; b]$, và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất có thể trùng với giá trị cực trị của hàm số. Ta thấy đây là đồ thị của một hàm liên tục có cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, nên ta có định lý 1.

Định lý 1

Mọi hàm số liên tục đều trên $[a; b]$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.

Chú ý: Với hàm liên tục luôn có một giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất đó có thể đạt được tại không chỉ một điểm $x = a$ mà có thể nhiều hơn. Ví dụ như hình 1.14 với đồ thị hàm số $f(x) = 9 - x^2$. Trên $[-3; 3]$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là 0 khi $x = 3$ hoặc $x = -3$.

2. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn

Để việc tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $[a; b]$ nhanh hơn, ta áp dụng nhận xét sau:

Nếu đạo hàm $f'(x)$ giữ nguyên dấu trên đoạn $[a; b]$ (hay nói cách khác là hàm số đơn điệu trên đoạn $[a; b]$), khi đó $f(x)$ đạt GTLN, GTNN tại các đầu mút của đoạn.

Nếu chỉ có một số hữu hạn các điểm $x_i (x_i < x_{i+1})$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định thì hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $(x_i; x_{i+1})$. Rõ ràng giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số trên đoạn $[a; b]$ là số lớn nhất (số nhỏ nhất) trong các giá trị của hàm số tại hai đầu mút a, b và các điểm x_i nói trên.

Chú ý

Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

Ví dụ hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; 1)$.

Quy tắc

1. Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định (gọi là các điểm tới hạn).
2. Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$.
3. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có

$$M = \max_{[a; b]} f(x); m = \min_{[a; b]} f(x).$$

Dưới đây là một số ví dụ tiêu biểu, từ các ví dụ này, ta sẽ đưa ra kết luận về các hàm số tiêu biểu có thể kết luận là luôn đơn điệu trên đoạn $[a; b]$ cho trước.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{5x+6}{2x+3}$. Biết M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 1]$, m là GTNN của hàm số trên $[0; 1]$, khi đó giá trị của biểu thức $M + m$ là

A. $\frac{21}{5}$. B. 2. C. $\frac{11}{5}$. D. $\frac{1}{5}$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta thấy hàm số $y = \frac{5x+6}{2x+3}$ đơn điệu trên $[0; 1]$ nên hàm số đạt GTLN, GTNN trên $[0; 1]$ tại điểm đầu mút, nên ta không cần tính y' mà có luôn

$$M + m = f(0) + f(1) = \frac{6}{3} + \frac{5 \cdot 1 + 6}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{21}{5}.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = 5x^5 + 2x^3 + 6x + 1$. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $[-1; 2]$.

Lời giải

Ta có $y' = 25x^4 + 6x^2 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó GTNN, GTLN của hàm số lần lượt là $f(-1) = -12 = \min_{[-1; 2]} f(x)$.

$$\max_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 189.$$

Ví dụ 3: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt[3]{2x+1}$ trên $[1;5]$?

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \left((2x+1)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (2x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} > 0 \text{ với mọi } x \neq -\frac{1}{2}.$$

Vậy trên $[1;5]$ thì hàm số luôn đồng biến. Từ đây ta có:

$$\min_{[1;5]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{3}$$

$$\max_{[1;5]} f(x) = f(5) = \sqrt[3]{11}$$

Ví dụ 4: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt{x^5 + x^3 + 1}$ trên $[1;3]$?

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } x^5 + x^3 + 1 \geq 0$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{5x^4 + 3x^2}{2\sqrt{x^5 + x^3 + 1}} \geq 0 \text{ với mọi } x \text{ thỏa mãn điều kiện trên.}$$

Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên $[1;3]$, từ đây suy ra

$$\min_{[1;3]} f(x) = f(1) = \sqrt{3}; \max_{[1;3]} f(x) = f(3) = \sqrt{271}.$$

Từ các ví dụ trên ta rút ra kết luận sau:

1. Các hàm đa thức chỉ bao gồm các hạng tử có bậc lẻ và hệ số tự do có hệ số là các số cùng âm, hoặc cùng dương thì luôn đơn điệu trên tập xác định nên GTLN, GTNN xảy ra tại các điểm đầu mút.
2. Các hàm có dạng $\sqrt{ax+b}; \sqrt[3]{ax+b}; \sqrt[4]{ax+b}; \dots$ hay tổng quát là có dạng $\sqrt[n]{ax+b}$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) thì thường đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$ nên GTLN, GTNN xảy ra tại các điểm đầu mút.
3. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ luôn đơn điệu trên $[a;b]$ với $[a;b]$ không chứa $-\frac{d}{c}$ nên GTLN, GTNN xảy ra tại các điểm đầu mút.

STUDY TIP

Với các hàm số là tổng của các hàm cùng đồng biến, hoặc cùng nghịch biến thì cũng đồng biến, nghịch biến, nên GTLN, GTNN cũng đạt được tại đầu mút.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh

đề nào dưới đây là đúng?

A. $m < -1$.

B. $3 < m \leq 4$.

C. $m > 4$.

D. $1 \leq m < 3$.

Đáp án C.

Lời giải

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{x+m}{x-1} \text{ trên đoạn } [2;4]. \text{ Ta có } y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}.$$

+ Nếu $m < -1$ thì $y' > 0, \forall x \in [2;4] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[2;4]$.

Khi đó $\min_{[2;4]} y = y(2) = 2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (không thỏa mãn $m < -1$).

+ Nếu $m > -1$ thì $y' < 0, \forall x \in [2;4] \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $[2;4]$.

Khi đó $\min_{[2;4]} y = y(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (thỏa mãn). Vậy $m = 5 > 4$.

STUDY TIP

Ví dụ 5 vận dụng kết luận 3 phía trên để đưa ra cách giải như bên cạnh.

B. Các dạng toán về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Dạng toán 1: Dùng định nghĩa tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Phương pháp chung

Giả sử hàm số f xác định trên miền D ($D \subset \mathbb{R}$).

$$* M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases}$$

$$* m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$ trên tập xác định là

- A. $\max P = \frac{1}{4}$. B. $\max P = \frac{1}{2}$. C. $\max P = 1$. D. $\max P = 0$.

Đáp án A.

Lời giải

Tập xác định $D = [0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } P = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) = -x + \sqrt{x} = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Do đó } \max_D P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 2: Giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2 + 3x + 5}{(x-1)^2}$ trên tập xác định là

- A. $\min A = \frac{1}{12}$. B. $\min A = -\frac{13}{5}$. C. $\min A = -\frac{5}{18}$. D. $\min A = \frac{11}{36}$.

Đáp án D.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Ta có } A = \frac{x^2 + 3x + 5}{(x-1)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1) + 5(x-1) + 9}{(x-1)^2} = 1 + \frac{5}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x-1}. \text{ Lúc đó } A = 1 + 5t + 9t^2 = \left(3t + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{36} \geq \frac{11}{36}$$

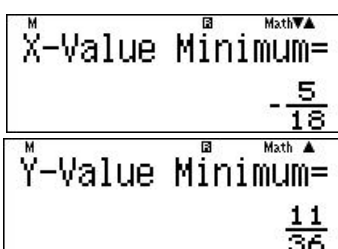
$$\text{Vậy } \min A = \frac{11}{36} \text{ khi } t = -\frac{5}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = -\frac{5}{18} \Leftrightarrow x = -\frac{13}{5}.$$

Đối với máy tính cầm tay fx-570VN PLUS và máy tính VINACAL 570 ES PLUS II ta có thể tìm được GTLN; GTNN của tam thức bậc hai bằng cách sử dụng **MODE** **5** **(EQN)** **3** (đối với casio) hay **MODE** **5** **(EQN)** **1** (đối với vinacal). Sau đó lần lượt nhập các hệ số của các số hạng trong tam thức. Ấn **=** liên tiếp 4 lần thì ta có kết quả giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất.

Trong bài toán này ta ấn **MODE** **5** **(EQN)** **3**

Sau đó ấn **9** **=** **5** **=** **1** **=** **=** **=** **=**

Máy lần lượt hiện như hình bên.



Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{mx+n}{x^2+1}$. Giá trị của m, n sao cho giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên D lần lượt là 4 và -1 là

- A. $(m;n) = (3;4)$. B. $(m;n) \in \{(-4;-3); (4;-3)\}$.
C. $(m;n) = (-3;-4)$. D. $(m;n) \in \{(4;3); (-4;3)\}$.

Đáp án D.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có:

$$* \max_{\mathbb{R}} y = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 4, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R}, y(x_0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{mx+n}{x^2+1} \leq 4, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R}, \frac{mx_0+n}{x_0^2+1} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - mx + (4-n) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R}, 4x_0^2 - mx_0 + (4-n) = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \leq 0 \\ \Delta_{(1)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta_{(1)} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16(4-n) = 0 \quad (*)$$

* Tương tự ta có:

$$\min_{\mathbb{R}} y = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + (n+1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + mx_0 + (n+1) = 0 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} \leq 0 \\ \Delta_{(2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta_{(2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4(n+1) = 0 \quad (**)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} m^2 - 16(4-n) = 0 \\ m^2 - 4(n+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = 3 \\ m = -4 \\ n = 3 \end{cases}$$

Dạng toán 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng cách dựa vào miền giá trị của hàm số.

Phương pháp chung

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

$$y_0 \in f(D) \Leftrightarrow \text{phương trình } y_0 = f(x) \text{ có nghiệm} \\ \Leftrightarrow \min_D f(x) \leq y_0 \leq \max_D f(x).$$

Trong trường hợp 2 biến số thì ta xét bài toán tổng quát sau:

Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $F(x, y) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = G(x, y)$.

Bước 1: Gọi T là tập giá trị của P . Khi đó $m \in T$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = m \end{cases} \quad (1)$

Bước 2: Tìm các giá trị m để hệ (1) có nghiệm (thường đưa về điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai), rồi suy ra tập giá trị T của P . Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = G(x, y)$.

STUDY TIP

Với các bài toán tìm GTLN, GTNN ta cần đặc biệt lưu ý dấu bằng xảy ra. Nếu dấu bằng không xảy ra thì ta phải kiểm tra lại các bước ở trên.

Ví dụ 1: Tổng của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+x+1}$ trên tập xác định là

A. $S = \frac{2}{3}$.

B. $S = \frac{4}{3}$.

C. $S = 1$.

D. $S = \frac{1}{3}$.

Đáp án A.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Do $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$y = \frac{x+1}{x^2+x+1} \Leftrightarrow y \cdot (x^2+x+1) = x+1 \Leftrightarrow yx^2 + (y-1)x + y-1 = 0 (*)$$

* Nếu $y = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow -x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$

* Nếu $y \neq 0$ thì $(*)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 - 4y(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)(-1-3y) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq y \leq 1; y \neq 0.$$

Kết hợp cả hai trường hợp ta được tập giá trị của hàm số là $-\frac{1}{3} \leq y \leq 1$.

$$\text{Do đó } \max_{\mathbb{R}} y = 1; \min_{\mathbb{R}} y = -\frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 2: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{2x^2+10x+3}{3x^2+2x+1}$ trên tập xác định lần lượt là

A. $\max A = \frac{5}{2}; \min A = \frac{2}{3}$.

B. $\max A = 7; \min A = \frac{5}{2}$.

C. $\max A = 5; \min A = 1$.

D. $\max A = \frac{1+3\sqrt{17}}{4}; \min A = \frac{1-3\sqrt{17}}{4}$.

Đáp án D

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } A = \frac{2x^2+10x+3}{3x^2+2x+1} \Leftrightarrow (3A-2)x^2 + 2(A-5)x + A-3 = 0 (*)$$

$$* 3A-2=0 \Leftrightarrow A=\frac{2}{3} \Rightarrow x=-\frac{7}{26}$$

* $3A-2 \neq 0 \Leftrightarrow A \neq \frac{2}{3}$ thì $(*)$ là phương trình bậc hai đối với x . Do đó phương trình $(*)$ có nghiệm nếu

$$\Delta' = (A-5)^2 - (3A-2)(A-3) \geq 0 \Leftrightarrow A^2 - 10A + 25 - (3A^2 - 11A + 6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2A^2 + A + 19 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-3\sqrt{17}}{4} \leq A \leq \frac{1+3\sqrt{17}}{4}$$

$$\text{Do đó } \max A = \frac{1+3\sqrt{17}}{4} \text{ và } \min A = \frac{1-3\sqrt{17}}{4}.$$

Dạng toán 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng phương pháp hàm số.

Phương pháp chung

Phương pháp 1: Sử dụng đạo hàm tính trực tiếp.

Cách 1: Thường dùng khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng.

1. Tính $f'(x)$.
2. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
3. Dựa vào bảng biến thiên kết luận min, max.

Cách 2: Thường dùng khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn $[a; b]$.

1. Tính $f'(x)$.
2. Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

3. Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$.

4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có

$$M = \max_{[a; b]} f(x); m = \min_{[a; b]} f(x).$$

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $m = 11$.

B. $m = 0$.

C. $m = -2$.

D. $m = 3$.

Đáp án C.

Lời giải

Ta thấy bài toán yêu cầu tìm GTNN trên một đoạn là $[0; 2]$ nên ta sẽ áp dụng cách 2 để giải quyết bài toán nhanh chóng hiệu quả hơn.

$$\text{Đạo hàm } y' = 3x^2 - 14x + 11 = (x - 1)(3x - 11); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Do $x \in [0; 2]$ nên chỉ có $x = 1$ thỏa mãn.

Ta có $y(0) = -2; y(1) = 3; y(2) = 0$ nên $m = \min_{[0; 2]} y = y(0) = -2$.

Ví dụ 2: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \frac{1}{x}$ trên $(0; 2]$ lần lượt là:

A. $\max_{(0; 2]} y = \frac{3}{2}$; không tồn tại $\min_{(0; 2]} y$.

B. $\max_{(0; 2]} y = \frac{3}{2}$; $\min_{(0; 2]} y = 0$.

C. $\max_{(0; 2]} y = \frac{3}{2}$; $\min_{(0; 2]} y = -1$.

D. $\max_{(0; 2]} y = \frac{5}{2}$; $\min_{(0; 2]} y = 0$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0; 2]$. Ta có hàm số đồng biến và liên tục trên $(0; 2]$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty; f(2) = \frac{3}{2}$. Do đó trên $(0; 2]$ hàm số không có giá trị nhỏ nhất,

và giá trị lớn nhất của $f(x)$ là $\max_{(0; 2]} f(x) = f(2) = \frac{3}{2}$.

STUDY TIP

Ta cũng có thể lập bảng biến thiên của hàm số để quan sát kết quả một cách rõ hơn.

Ví dụ 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + 2 + \frac{1}{x-1}$ trên $(1; +\infty)$ lần lượt là
A. không tồn tại. **B.** $\min_{(1;+\infty)} f(x) = -5$. **C.** $\min_{(1;+\infty)} f(x) = 2$. **D.** $\min_{(1;+\infty)} f(x) = 5$.

Đáp án D.

Lời giải

Nhận xét: Hàm số đã cho xác định trên $(1; +\infty)$.

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1; +\infty) \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$	5	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất $\min_{(1;+\infty)} f(x) = 5$ khi $x = 2$.

Phương pháp 2: Phương pháp đổi biến (đặt ẩn phụ) để tìm GTLN, GTNN.

Phương pháp

Khi đặt ẩn phụ, cần chú ý một số điều sau

- * Nếu đặt $t = x^2$ thì $t \geq 0$ và giả sử $x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; 1]$.
- * Nếu đặt $t = \sin x$ (hoặc $t = \cos x$) thì ta suy ra $t \in [-1; 1]$.
- * Nếu đặt $t = \sin^2 x$ (hoặc $t = \cos^2 x$) thì suy ra $t \in [0; 1]$.
- * Nếu đặt $t = \sin x \pm \cos x \Rightarrow t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.
- * Nếu $t = x + \frac{1}{x}; x \neq 0 \Rightarrow |t| \geq 2$.

Ví dụ 1: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = g(x) = 2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 \text{ lần lượt là}$$

- A.** $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 3; \min_{\mathbb{R}} g(x) = \frac{3}{2}$. **B.** $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 3; \min_{\mathbb{R}} g(x) = -\frac{3}{2}$.
C. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 3; \min_{\mathbb{R}} g(x) = -1$. **D.** $\max_{\mathbb{R}} g(x) = -1; \min_{\mathbb{R}} g(x) = -\frac{3}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$. Lúc đó $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

$$f'(t) = 4t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } f(-1) = -1; f(1) = 3; f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Do đó } \min_{\mathbb{R}} g(x) = \min_{[-1;1]} f(t) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \text{ khi } \sin x = -\frac{1}{2}$$

STUDY TIP

Trong chú ý ở phần 2, hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó. Tuy nhiên ví dụ 3 cho thấy cũng có những hàm số có giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất trên một khoảng. Vì thế các bài toán xét trên khoảng ta nên vận dụng theo cách 1, tức là xét BBT.

Phương pháp này thường áp dụng cho bài toán min - max hàm số lượng giác (tiếp nối chương hàm số lượng giác) đã học ở lớp 11 mà tôi đã đưa vào trong Công phá toán tập 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\max_{\mathbb{R}} g(x) = \max_{[-1;1]} f(t) = f(1) = 3 \text{ khi } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$ lần lượt là

A. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 1; \min_{\mathbb{R}} g(x) = -2.$

B. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 0; \min_{\mathbb{R}} g(x) = -1.$

C. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 1; \min_{\mathbb{R}} g(x) = 0.$

D. $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 1; \min_{\mathbb{R}} g(x) = -1.$

Đáp án C.

Lời giải

Ta có $\sin^2 x + \sin x + 1 = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Tập xác định $D = \mathbb{R}.$

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1].$ Lúc đó $y = f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}; t \in [-1; 1].$

$$f'(t) = \frac{-t^2 - 2t}{(t^2 + t + 1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
y'	+	0	-
y	0	1	$\frac{2}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\max_{\mathbb{R}} g(x) = \max_{[-1;1]} f(t) = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\min_{\mathbb{R}} g(x) = \min_{[-1;1]} f(t) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = g(x) = x^6 - 3x^4 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4} \text{ trên } [-1; 1] \text{ lần lượt là}$$

A. $\max_{[-1;1]} g(x) = \frac{3}{4}; \min_{[-1;1]} g(x) = \frac{1}{4}.$

B. $\max_{[-1;1]} g(x) = \frac{1}{2}; \min_{[-1;1]} g(x) = \frac{1}{4}.$

C. $\max_{[-1;1]} g(x) = \frac{73}{100}; \min_{[-1;1]} g(x) = \frac{1}{2}.$

D. $\max_{[-1;1]} g(x) = \frac{1}{3}; \min_{[-1;1]} g(x) = \frac{1}{4}.$

Đáp án A.

Lời giải

Đặt $t = x^2 \Rightarrow t \in [0; 1], \forall x \in [-1; 1].$

Lúc đó $y = f(t) = t^3 - 3t^2 + \frac{9}{4}t + \frac{1}{4}$ liên tục trên $[0; 1].$

Nếu khảo sát trực tiếp hoặc dùng miền giá trị đều dẫn đến tính toán phức tạp. Phương pháp đổi biến trong trường hợp này rất hiệu quả. Chú ý khi đổi biến ta cần tìm điều kiện của biến mới.

STUDY TIP

Từ bài toán trong ví dụ 2 này ta đưa ra ứng dụng sau:

Với bài toán:

Xác định m để phương trình $m \sin^2 x + (m-1) \sin x + (m-1) = 0 (*)$

Ta có:

$(*) \Leftrightarrow m = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

$(*)$ có nghiệm khi $0 \leq m \leq 1.$

STUDY TIP

Trong bài toán này, do bậc của x khá cao, lên đến mũ 6, nên việc giải $y'=0$ sẽ gặp khó khăn, do vậy nếu đặt $t=x^2$ thì bậc sẽ giảm xuống một nửa, giải phương trình $y'=0$ ta chỉ cần sử dụng **MODE** **5** **3** trong máy tính để giải phương trình bậc hai tìm ra nghiệm.

STUDY TIP

Trong bài toán này, nếu ta đạo hàm trực tiếp thì ta sẽ có $y'=(2x+1)(x^2+x+m)$ lúc này việc xét dấu của y' sẽ trở nên phức tạp. Do ở đây biểu thức trong dấu ngoặc thì m hoàn toàn cô lập với x , do vậy nếu đặt $x^2+x=t$ thì y' sẽ rất đơn giản. Việc giải phương trình $y'=0$ trở nên đơn giản hơn.

MTCT TIP

Ngoài việc tìm điều kiện của t bằng bảng biến thiên như trong lời giải bên, ta có thể sử dụng MTCT để tìm điều kiện của t .

Sử dụng lệnh **MODE** **7**, sau đó nhập $f(x)=X^2+X$

Chọn **START** -2 ; **END** 2; **STEP** 0,5 ta sẽ bảng giá trị của hàm $t=f(x)=x^2+x$ trên $[-2;2]$. Quan sát hình phía dưới.

$$f'(t)=3t^2-6t+\frac{9}{4}; f'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{3}{2} \notin [0;1] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(0)=\frac{1}{4}; f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}; f(1)=\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1;1]} g(x) = \max_{[0;1]} f(t) = \frac{3}{4} \text{ khi } t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\min_{[-1;1]} g(x) = \min_{[0;1]} f(t) = \frac{1}{4} \text{ khi } t=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=(x^2+x+m)^2$ với $x \in [-2;2]$. Tất cả các giá trị của m để $\min_{[-2;2]} y = 4$ là

A. $m \in \left\{-4; -\frac{15}{4}\right\}.$

B. $m \in \left\{-4; -\frac{15}{4}; -8; \frac{9}{4}\right\}.$

C. $m = -8.$

D. $m \in \left\{-8; \frac{9}{4}\right\}.$

Đáp án D.

Lời giải

Bước 1: Đặt $t=x^2+x; x \in [-2;2]$

Bước 2: Tìm điều kiện của t .

$$\text{Ta có } t'=2x+1; t'=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \in [-2;2].$$

x	-2	$-\frac{1}{2}$	2
t'	-	0	+
t	2	$-\frac{1}{4}$	6

$$\text{Vậy suy ra } t \in \left[-\frac{1}{4}; 6\right].$$

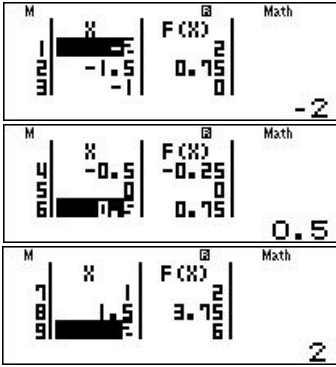
$$\text{Ta có } y'=2(t+m); y'=0 \Leftrightarrow t=-m.$$

Bước 3: Xét các trường hợp.

- Trường hợp 1: $-m \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}$

t	$-\infty$	$-m$	$-\frac{1}{4}$	6	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+	+	+
$f(t)$			$\left(m-\frac{1}{4}\right)^2$		

$$\text{Vậy } \min_{[-2;2]} y = y\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(m-\frac{1}{4}\right)^2.$$



Ta thấy màn hình hiện các giá trị của hàm $t = x^2 + x$ ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-2; -0,5)$ và đồng biến trên $(-0,5; 2)$ bên cột $f(x)$ đưa ra giá trị của hàm số tại các giá trị x tương ứng, từ đó ta suy ra $t \in \left[-\frac{1}{4}; 2\right]$.

- Trường hợp 2: $-\frac{1}{4} < -m < 6 \Leftrightarrow -6 < m < \frac{1}{4}$

t	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$-m$	6	$+\infty$
$f'(t)$	-	-	0	+	+
$f(t)$					

Vậy $\min_{[-2;2]} y = y(-m) = 0$. (loại)

- Trường hợp 3: $6 \leq -m \Leftrightarrow m \leq -6$

t	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	6	$-m$	$+\infty$
$f'(t)$	-	-	-	0	+
$f(t)$					

Vậy $\min_{[-2;2]} y = 4 \Leftrightarrow (m+6)^2 = 4$ nếu $m \leq -6$ hoặc $\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 = 4$ nếu $m \geq \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -8 \\ m = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Dạng toán 4: Sử dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Phương pháp chung

Sử dụng một số bất đẳng thức

1. Bất đẳng thức AM – GM:

Cho n số thực không âm $x_1; x_2; \dots; x_n$ ta có:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

2. Bất đẳng thức Bunyakovsky:

Với hai bộ số $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ và $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ ta có:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu một số b_i

nào đó ($i = 1; 2; \dots; n$) bằng 0 thì a_i tương ứng bằng 0.

$$\text{Hệ quả: } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq 4abcd$$

Ví dụ 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x}$ là

A. $\max y = \sqrt{10}$.

B. $\max y = 4$.

C. $\max y = 2$.

D. $\max y = 2\sqrt{5}$.

Đáp án C.

STUDY TIP

Hàm số đã cho được cho dưới dạng tổng của hai căn thức. Hai biểu thức dưới dấu căn có tổng không đổi bằng 2, vì vậy nếu áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số $(1;1)$ và $(\sqrt{3x-5};\sqrt{7-3x})$ thì ta sẽ giải quyết được bài toán.

STUDY TIP

Trong bài toán này, ta có thể biểu diễn $x-4$ thành $\frac{x-4}{2} \cdot 2$ và khi áp dụng bất đẳng thức AM - GM thì vế phải có dạng kx sau đó có thể rút gọn được với x ở mẫu. Con số 2 được lấy bằng cách lấy căn bậc hai của 4.

Lời giải

Tập xác định $D = \left[\frac{5}{3}; \frac{7}{3} \right]$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số ta có

$$y^2 = \left(1 \cdot \sqrt{3x-5} + 1 \cdot \sqrt{7-3x} \right)^2 \leq (1^2 + 1^2)(3x-5+7-3x)$$

$$\Leftrightarrow y^2 \leq 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\sqrt{3x-5}}{1} = \frac{\sqrt{7-3x}}{1} \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $\max y^2 = 4 \Rightarrow \max y = 2$ khi $x = 2$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4}}{5x}$ trên $[4; +\infty)$.

- A. $\max_{[4; +\infty)} y = \frac{1}{40}$. B. $\max_{[4; +\infty)} y = \frac{1}{30}$. C. $\max_{[4; +\infty)} y = \frac{1}{10}$. D. $\max_{[4; +\infty)} y = \frac{1}{20}$.

Đáp án D.

Lời giải

Tập xác định $D = [4; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y = \frac{\sqrt{x-4}}{5x} = \frac{\sqrt{\frac{x-4}{2}} \cdot 2}{5x} \leq \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{x-4}{2} + 2 \right)}{5x} = \frac{\frac{x-4+4}{2}}{10x} = \frac{1}{20}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x-4}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy $\max_D y = \frac{1}{20}$ khi $x = 8$.



Bài đọc thêm 1: Phương pháp giải nhanh các bài tập tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$

Dùng máy tính:

Cách 1:

Sử dụng TABLE xét hàm số $f(x)$ trên $[a;b] \rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} f(x) \\ \max_{[a;b]} f(x) \end{cases}$

Các lưu ý cách chọn các giá trị Start, End và Step.

Start? Ta nhập giá trị a.

End? Nhập giá trị b.

Step? Nhập bước nhảy phù hợp.

Từ đây ta có thể nghiên cứu nhanh đáng điệu của đồ thị trên đoạn $[a;b]$, từ đó chọn giá trị thích hợp.

Cách 2:

1. Giải phương trình $f'(x) = 0$ bằng cách sử dụng nút SOLVE (lấy giá trị của x nằm trên $[a;b]$ để dò nghiệm), ta được các nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.
2. Dùng CALC để tìm các giá trị của $f(x)$ tại các điểm đầu mút và các điểm x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ rồi so sánh từ đó kết luận min, max.

Ví dụ 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$ là

A. 6.

B. -2.

C. -3.

D. $\frac{19}{3}$.

Đáp án A.

Lời giải

Ấn MODE 7 và nhập F(x) như hình bên.

Tiếp theo chọn Start? 2; End 4; step 0,2 thì máy hiện kết quả như sau:

X	F(X)
2	6.5333
2.2	6.2571
2.4	6.0222
2.6	5.8111
2.8	5.6111
3	5.5

X	F(X)
3.2	5.6111
3.4	5.8111
3.6	6.0222
3.8	6.2571
4	6.5333

X	F(X)
3.2	5.6111
3.4	5.8111
3.6	6.0222
3.8	6.2571
4	6.5333

Ta thấy khi cho x chạy từ 2 đến 3 giá trị của hàm số giảm từ 7 đến 6, sau đó từ 3 đến 4 giá trị của hàm số lại tăng lên. Từ đây ta kết luận giá trị nhỏ nhất của hàm số là 6 khi $x = 3$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[3]{(2x-1)(1-x)^2}$

Tiếp tục ấn MODE 7, chọn Start 0, End 3, Step 0,2 và máy hiện:

X	F(X)
0	-1
0.2	-0.726
0.4	-0.416
0.6	-0.177
0.8	0.089
1	0.383
1.2	0.663
1.4	0.925
1.6	1.16

X	F(X)
1.8	1.374
2	1.5
2.2	1.609
2.4	1.674
2.6	1.714
2.8	1.726
3	1.714

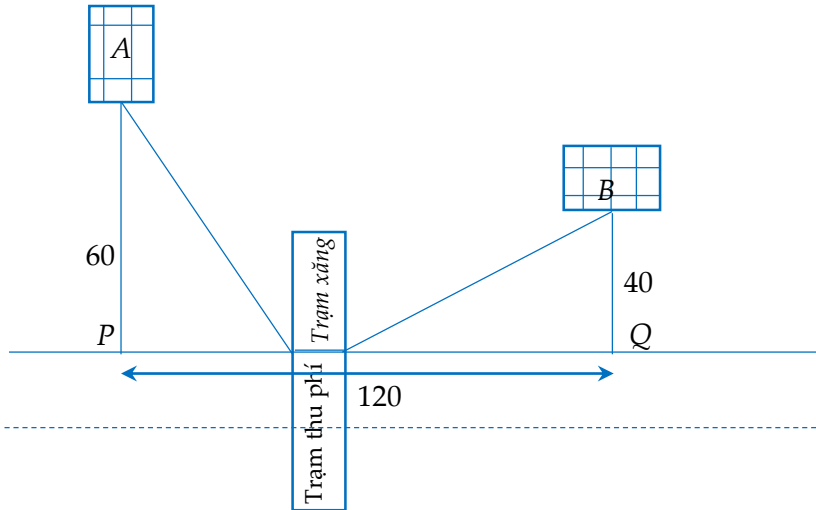
STUDY TIP

Chức năng TABLE chỉ giúp ta dự đoán khoảng mà F(x) đạt giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất, tùy bài mới thể hiện giá trị chính xác, do vậy TABLE chỉ mang tính chất tương đối, hỗ trợ trong quá trình làm bài.

Ta nhận thấy giá trị của $F(x)$ tăng dần khi cho x chạy từ 0 đến 0,6 sau đó giảm dần khi đến khi x chạy đến 1 (lúc này giá trị của $F(x)$ là bằng 0) thì sau đó giá trị của hàm số lại tăng dần khi cho x chạy tiếp từ 1 đến 3.

Vậy ta kết luận $\min_{[0;3]} f(x) = f(0) = -1$; $\max_{[0;3]} f(x) = f(3) = \sqrt[3]{20}$.

Ví dụ 3: Đường cao tốc mới xây nối hai thành phố A và B, hai thành phố này muốn xây một trạm thu phí và trạm xăng ở trên đường cao tốc như hình vẽ. Để tiết kiệm chi phí đi lại, hai thành phố quyết định tính toán xem xây trạm thu phí ở vị trí nào để tổng khoảng cách từ hai trung tâm thành phố đến trạm là ngắn nhất, biết khoảng cách từ trung tâm thành phố A, B đến đường cao tốc lần lượt là 60 km và 40 km và khoảng cách giữa hai trung tâm thành phố là 120 km (được tính theo khoảng cách của hình chiếu vuông góc của hai trung tâm thành phố lên đường cao tốc, tức là PQ kí hiệu như hình vẽ). Tìm vị trí của trạm thu phí và trạm xăng? Giả sử chiều rộng của trạm thu phí không đáng kể.



A. 72 km kể từ P.

B. 42 km kể từ Q.

C. 48 km kể từ P.

D. tại P.

Đáp án A.

Lời giải

Thực chất bài toán trở thành tìm x để $AC + BC$ nhỏ nhất.

Theo định lí Pytago ta có

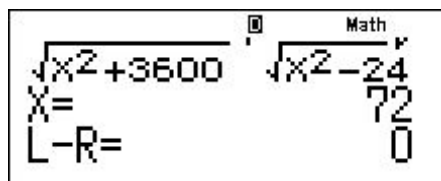
$$AC = \sqrt{60^2 + x^2}; BC = \sqrt{(120 - x)^2 + 40^2} = \sqrt{x^2 - 240x + 16000}$$

$$\text{Khi đó } f(x) = AC + BC = \sqrt{x^2 + 3600} + \sqrt{x^2 - 240x + 16000}.$$

Ta cần tìm $\min_{(0;120)} f(x)$.

Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3600}} + \frac{x - 120}{\sqrt{x^2 - 240x + 16000}}$, khi bấm máy tính nhằm nghiệm

bằng cách nhập vào màn hình biểu thức $f'(x)$ và ấn **SHIFT** **SOLVE** và chọn một số nằm trong khoảng $(0;120)$ để dò nghiệm, chẳng hạn nhập 2 máy nhanh chóng hiện nghiệm là 72 như sau:



Vậy từ đó ta có thể kết luận $CP = 72$ km.

STUDY TIP

Thường các bài toán thực tế, dùng Solve dò nghiệm sẽ rất nhanh. Ta sẽ tìm hiểu ở phần sau.



Bài đọc thêm 2:

Phương pháp giải nhanh các bài tập xác định m để hàm số đạt giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$

Với các bài toán này, thường cho ta 4 giá trị của m . Trong máy tính ta có thể lập bảng giá trị của hai hàm $F(x)$ và $G(x)$ cùng một lúc, ta sẽ thử bằng cách thế 2 tham số đề bài vào hai hàm $F(x)$ và $G(x)$ dùng phương pháp ở trên để giải nhanh.

Ta đến với ví dụ sau:

Ví dụ 1: Để hàm số $y = x^4 - 6mx^2 + m^2$ có $\max_{[-2;1]} y = \frac{4}{9}$ thì giá trị của tham số thực m là

A. 0. B. $\frac{2}{3}$. C. 1. D. $\frac{4}{3}$.

Đáp án B.

Lời giải

Đầu tiên ta gán các giá trị ở các phương án lần lượt vào các biến A, B, C, D bằng lệnh STO như sau:

Ấn **[0] [SHIFT] [RCL] (STO) A**

Tương tự với B, C, D.

Lúc này ta kiểm tra hai phương án A, B thì ta nhập hàm

$$f(x) = x^4 - 6A \cdot x^2 + A^2$$

$$g(x) = x^4 - 6B \cdot x^2 + B^2 \text{ như hình bên.}$$

Tiếp theo nhập Start? -2; End? 1 Step? 0,2. Ta thấy các giá trị của hàm số ở hai trường hợp m hiện như sau:

X	F(X)	G(X)
-2	16	0.4444
-1.8	10.4977	-2.017
-1.6	6.5536	-3.241
-1.4	3.8416	-3.553
-1.2	2.0736	-3.555
-1	1	-2.555
-0.8	0.4096	-1.705
-0.6	0.1296	-0.865
-0.4	0.0256	-0.169
-0.2	0.0016	-0.017
0	0	0
0.2	0.0016	0.017
0.4	0.0256	0.169
0.6	0.1296	0.865
0.8	0.4096	1.705
1	1	2.555

X	F(X)	G(X)
-2	16	0.4444
-1.8	10.4977	-2.017
-1.6	6.5536	-3.241
-1.4	3.8416	-3.553
-1.2	2.0736	-3.555
-1	1	-2.555
-0.8	0.4096	-1.705
-0.6	0.1296	-0.865
-0.4	0.0256	-0.169
-0.2	0.0016	-0.017
0	0	0
0.2	0.0016	0.017
0.4	0.0256	0.169
0.6	0.1296	0.865
0.8	0.4096	1.705
1	1	2.555

X	F(X)	G(X)
-2	16	0.4444
-1.8	10.4977	-2.017
-1.6	6.5536	-3.241
-1.4	3.8416	-3.553
-1.2	2.0736	-3.555
-1	1	-2.555
-0.8	0.4096	-1.705
-0.6	0.1296	-0.865
-0.4	0.0256	-0.169
-0.2	0.0016	-0.017
0	0	0
0.2	0.0016	0.017
0.4	0.0256	0.169
0.6	0.1296	0.865
0.8	0.4096	1.705
1	1	2.555

STUDY TIP

Ở các bài toán dạng này ta thấy do đề bài chỉ có 4 phương án, nên ta chỉ cần thử 2 lần là có được kết quả.

Ta thấy khi $m = 0$ thì hàm số không đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{4}{9}$ (loại).

Ở trường hợp $m = \frac{2}{3}$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là $\frac{4}{9}$ khi $\begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.

Vậy ta chọn B.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Xem đáp án chi tiết tại trang 214

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3x-2}{x+2}$ trên $[-1; 2]$ là

- A. $\min y = 1.$ B. $\min y = -1.$
C. $\min y = -5.$ D. $\min y = -4.$

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^3+3}{x-1}$ trên $[2; 4]$ là

- A. $\min y = 11.$ B. $\min y = -3.$
C. $\min y = -2.$ D. $\min y = 6.$

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ trên $[-4; -2]$ là

- A. $\min y = -7.$ B. $\min y = -\frac{19}{3}.$
C. $\min y = -8.$ D. $\min y = -6.$

Câu 4: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$. Khi đó tổng $M+m$ bằng bao nhiêu?

- A. 48. B. 11. C. -1. D. 55.

Câu 5: Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ trên đoạn $[-2; 4]$ là:

- A. -22. B. -18. C. 64. D. 14.

Câu 6: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - x^2 - 8x$ trên $[1; 3]$ là

- A. $\max y = -8.$ B. $\max y = \frac{176}{27}.$
C. $\max y = -6.$ D. $\max y = -4.$

Câu 7: Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$.

- A. $\min P = -5.$ B. $\min P = 5.$
C. $\min P = \frac{7}{3}.$ D. $\min P = \frac{115}{3}.$

Câu 8: Tính tổng của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 + x$ trên $[1; 2]$.

- A. 1. B. 2. C. 12. D. 10.

Câu 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + \frac{54}{x-2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$.

- A. $\min y = 0.$ B. $\min y = -13.$
C. $\min y = 23.$ D. $\min y = -21.$

Câu 10: Xét hàm số $f(x) = 3x + 1 + \frac{3}{x+2}$ trên tập $D = (-2; 1]$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D bằng 5.
B. Hàm số $f(x)$ có một điểm cực trị trên D .
C. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên D bằng 1.
D. Không tồn tại giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D .

Câu 11: Gọi M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ trên đoạn $[-1; 3]$. Khi đó tổng $M+m$ có giá trị là một số thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 2).$ B. $(3; 5).$ C. $(59; 61).$ D. $(39; 42).$

Câu 12: Hàm số $y = x^3 - 3x$ có giá trị lớn nhất trên $[0; 2]$ là:

- A. 1. B. -2. C. 0. D. 2.

Câu 13: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ đạt tại $x = x_0$. Giá trị x_0 bằng

- A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.

Câu 14: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ trên $[2; +\infty)$ là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 15: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-2; 1]$

- A. $\max y = 2.$ B. $\max y = 0.$
C. $\max y = 20.$ D. $\max y = 54.$

Câu 16: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ trên $[-1; 1]$ là

- A. -1. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 17: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ trên $[-4; -2]$ là

- A. $\min y = -1.$ B. $\min y = -6.$
C. $\min y = -8.$ D. $\min y = \frac{1}{3}.$

Câu 18: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ trên đoạn $[-3; 3]$ là

- A. $\max f(x) = 1; \min f(x) = -35.$
B. $\max f(x) = 1; \min f(x) = -10.$
C. $\max f(x) = 17; \min f(x) = -10.$
D. $\max f(x) = 17; \min f(x) = -35.$

Câu 19: Cho hàm số $y = |2x^2 - 3x - 1|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ là:

- A. $\frac{17}{8}$. B. $\frac{9}{4}$. C. 2. D. 3.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 + 5x + 7$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5; 0]$ bằng bao nhiêu?

- A. 80. B. -143. C. 5. D. 7.

Câu 21: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Khi đó tích $M.m$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{3}$. B. 3. C. $\frac{10}{3}$. D. 1.

Câu 22: Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 3]$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 23: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

- A. $m = \frac{51}{2}$. B. $m = \frac{49}{4}$. C. $m = \frac{51}{4}$. D. $m = 13$.

Câu 24: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = f(x) = x\sqrt{1-x^2} \text{ trên } [-1; 1].$$

A. $\max_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

B. $\max_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

C. $\max_{[-1;1]} f(x) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

D. $\max_{\mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Câu 25: Cho hàm số $y = 2x + 3\sqrt{9-x^2}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng

- A. -6. B. -9. C. 9. D. 0.

Câu 26: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x} - 2x^2}{\sqrt{x} + 1}$. Khi đó giá trị của $M-m$ là

- A. -2. B. -1. C. 1. D. 2.

Câu 27: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

A. $\max_D f(x) = 0$; không tồn tại $\min_D f(x)$.

B. $\max_D f(x) = 0$; $\min_D f(x) = -\sqrt{5}$.

C. $\max_D f(x) = 0$; $\min_D f(x) = -1$.

D. $\min_D f(x) = 0$; không tồn tại $\max_D f(x)$.

Câu 28: Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2-x^2} - x$ là

- A. $2 - \sqrt{2}$. B. 2. C. $2 + \sqrt{2}$. D. 1.

Câu 29: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x - 4\sqrt{6-x}$ trên đoạn $[-3; 6]$. Tổng $M+m$ có giá trị là

- A. 18. B. -6. C. -12. D. -4.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ có tập xác định D . Gọi $M = \max_{x \in D} f(x)$, $m = \min_{x \in D} f(x)$. Khi đó $M-m$ bằng

- A. 1. B. Số khác. C. 2. D. 3.

Câu 31: Hàm số $y = 4\sqrt{x^2-2x+3} + 2x - x^2$ đạt giá trị lớn nhất tại hai giá trị x mà tích của chúng là:

- A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

Câu 32: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^3+20}{3} + 2\sqrt{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ là:

- A. 9. B. 32. C. 33. D. 42.

Câu 33: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

- A. $\frac{4}{e^2}$. B. $\frac{8}{e^3}$. C. 0. D. $x=1$.

Câu 34: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \ln(x+2)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- A. $-\ln 2$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $1-2\ln 2$. D. $\frac{1}{2} - \ln 2$.

Câu 35: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x \ln x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\min_{x \in (0; +\infty)} y = 1 + e$. B. $\min_{x \in (0; +\infty)} y = 1 + \frac{1}{e}$.

C. $\min_{x \in (0; +\infty)} y = 1 - e$. D. $\min_{x \in (0; +\infty)} y = 1 - \frac{1}{e}$.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[1; 2]$ bằng -2.

- A. $m = -3$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 3$.

Câu 37: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x(2 - \ln x)$ trên $[2; 3]$ là

- A. 1. B. $4 - 2\ln 2$.
C. e . D. $-2 + 2\ln 2$.

Câu 38: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + e^{2x}$ trên $[0; 1]$.

- A. $\max_{[0;1]} y = 1$. B. $\max_{[0;1]} y = e^2 + 1$.
C. $\max_{[0;1]} y = e^2$. D. $\max_{[0;1]} y = 2e$.

BÀI KIỂM TRA CHỦ ĐỀ 1 – SỐ 3

Xem đáp án chi tiết tại trang 241

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Đồ thị có 2 tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$.
- C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} - x^2 + mx + \frac{2}{3}$. Tìm m để điểm uốn của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng d có phương trình $y = x + 2$.

- A. $m = -2$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = -1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a khác 0 có đồ thị (C). Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số đã cho luôn có khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến.
- B. Trên đồ thị (C) tồn tại vô số cặp điểm đối xứng nhau qua trục tung.
- C. Đồ thị (C) luôn có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có đỉnh nằm trên trục tung.
- D. Tồn tại a, b, c để đồ thị (C) và trục hoành có duy nhất một điểm chung.

Câu 4: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+x-2}$ là:

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
y'	-		+	0	-		+
y	$+\infty$			4			$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số có các điểm cực trị là -1; 1; 3.
- B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 và giá trị lớn nhất là 4.
- C. Hàm số có 3 cực trị.
- D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + x - 3m$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

- A. $m = -\frac{5}{4}$. B. $m = \frac{5}{4}$.
- C. Không có m . D. $m = 1$.

Câu 7: Hàm số nào trong các hàm số sau luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^4$. B. $y = \frac{x-1}{2x+1}$.
- C. $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$. D. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1$.

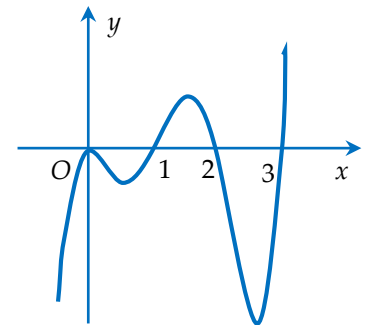
Câu 8: Phương trình $x + \sqrt{12-3x^2} - m = 0$ vô nghiệm khi

- A. $-2 \leq m \leq 4$. B. $m < -2$ hoặc $m > 4$.
- C. $-4 < m < 2$. D. $-2 < m < 4$.

Câu 9: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ nghịch biến trên các khoảng

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(3; +\infty)$.
- C. $(1; 3)$. D. $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới. Xác định các điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.



- A. $x = 0$ và $x = 2$. B. $x = 1$ và $x = 3$.
- C. $x = 2$. D. $x = 0$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+1}{x^2-2x-m}$ có hai tiệm cận đứng.

- A. $m = 1$. B. $m < -1$. C. $m = -1$. D. $m > -1$.

Câu 12: Cho hàm số $y = -x^4 + 2m^2x^2 + 3$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \neq 0$. C. $m \in \emptyset$. D. $m > 0$.

Câu 13: Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2), (2; 5), (5; +\infty)$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$		5	$+\infty$	3
	$-\infty$		1	1

Xét các mệnh đề sau

- (I) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.
- (II) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang.

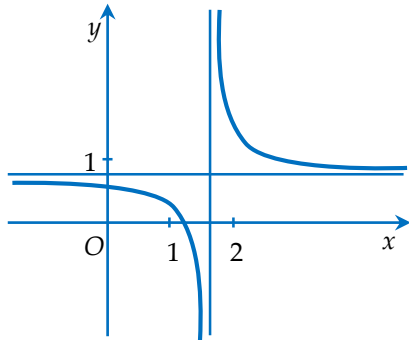
Chọn khẳng định **đúng**.

- A. (I) đúng, (II) sai.
- B. (I) sai, (II) đúng.
- C. Cả (I) và (II) cùng đúng.
- D. Cả (I) và (II) cùng sai.

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$.

- A. $\max_{\left[-3; \frac{3}{2}\right]} y = 3$.
 B. $\max_{\left[-3; \frac{3}{2}\right]} y = \frac{15}{8}$.
 C. $\max_{\left[-3; \frac{3}{2}\right]} y = 5$.
 D. $\max_{\left[-3; \frac{3}{2}\right]} y = 1$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; ($ad-bc \neq 0; c \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ phía dưới. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. $ad < 0, bd > 0$.
 B. $ad > 0, bd > 0$.
 C. $ad < 0, bd < 0$.
 D. $ad > 0, bd < 0$.

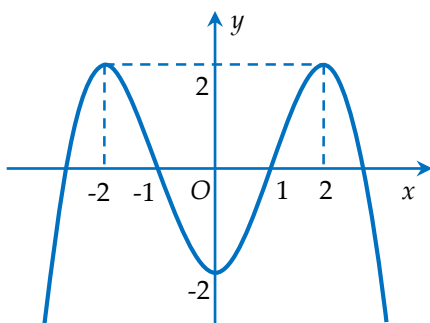
Câu 16: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$.
 B. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 17: Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và đồ thị của hàm số $y = 3x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

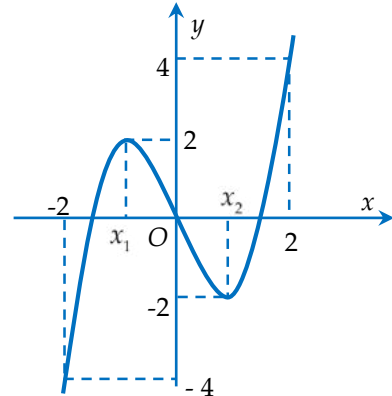
- A. 1.
 B. 3.
 C. 2.
 D. 0.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ dưới. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



- A. $y = -2$.
 B. $x = 0$.
 C. $M(0; -2)$.
 D. $N(2; 2)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ dưới. Tìm số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.



- A. 4.
 B. 5.
 C. 3.
 D. 6.

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{2x-1}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận.
 B. Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = \frac{3}{2}$.
 C. Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là $y = \frac{3}{2}$.
 D. Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -\frac{1}{2}$.

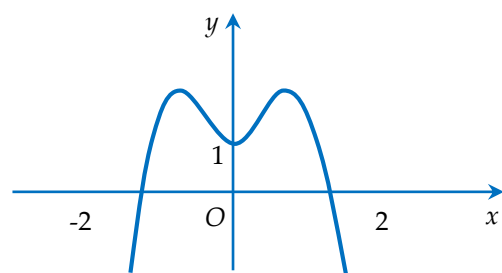
Câu 21: Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{x + 1}$. Tính giá trị của biểu thức $P = x_1 \cdot x_2$.

- A. $P = -5$.
 B. $P = -2$.
 C. $P = -1$.
 D. $P = -4$.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 23: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = -x^4 + 1$.
 B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
 C. $y = x^4 + 1$.
 D. $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-5)x - \frac{2}{3}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq -2$. B. $-2 \leq m \leq 2$.
C. $m \geq 2$. D. $-2 < m < 2$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax + 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn: $(x_1^2 + x_2 + 2a)(x_2^2 + x_1 + 2a) = 9$.

- A. $a = 2$. B. $a = -4$. C. $a = -3$. D. $a = -1$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	-	0	+	+	0	-
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$-\infty$	$\searrow$
		1		-15		

Tìm m để phương trình $f(x) + m = 0$ có nhiều nghiệm thực nhất.

- A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 15 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -15 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 15 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -15 \end{cases}$.

Câu 27: Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{2x+1}-x}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận (gồm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Giả sử đường thẳng AB cũng đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = abc + ab + c$.

- A. -9. B. $-\frac{25}{9}$. C. $-\frac{16}{25}$. D. 1.

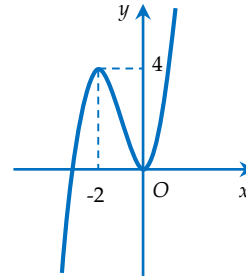
Câu 29: Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - (1+2m)x^2 + 3mx - m$ có điểm cực đại, cực tiểu nằm về 2 phía với trục hoành.

- A. $0 < m < 4$. B. $\begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$.
C. $\begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$.

Câu 30: Cho M là giao điểm của đồ thị $(C): y = \frac{2x-1}{2x+3}$ với trục hoành. Khi đó tích các khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận là

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 2.

Câu 31: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có dạng như dưới



Hỏi đồ thị hàm số $y = |x^3 + 3x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 32: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Khi đó tích mM bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{3}$. B. 3. C. $\frac{10}{3}$. D. 1.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[1; 2]$ bằng -2 .

- A. $m = -3$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 3$.

Câu 34: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Gọi d là đường thẳng đi qua điểm cực đại của (C) và có hệ số góc k . Tìm k để tổng khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của (C) đến d là nhỏ nhất.

- A. $k = \pm \frac{1}{16}$. B. $k = \pm \frac{1}{4}$. C. $k = \pm \frac{1}{2}$. D. $k = \pm 1$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) > 0, \forall x > 0$. Biết $f(1) = 2$, hỏi khẳng định nào sau đây có thể xảy ra?

- A. $f(2) + f(3) = 4$. B. $f(-1) = 2$.
C. $f(2) = 1$. D. $f(2016) > f(2017)$.

Câu 36: Cho hàm số $y = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{khi } x \leq 1 \\ x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$.

- A. $\max_{[-2;3]} y = -2$. B. $\max_{[-2;3]} y = 2$.
C. $\max_{[-2;3]} y = 1$. D. $\max_{[-2;3]} y = 3$.

Câu 37: Tìm tất cả các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

- A. $y = 1$ và $y = -1$.
B. $y = 1$.
C. $y = -1$.
D. Không có tiệm cận ngang.

Câu 38: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx^2 - x + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

- A. $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right)$. B. $(-\infty; -1)$.
C. $(-1; +\infty)$. D. $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right]$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 + 2(m+2)x^2 - 4(m+3)x + 1$ có ba điểm cực trị.

- A. $m > -\frac{13}{4}$. B. $m < -\frac{11}{4}$.
C. $\begin{cases} m < -5 \\ -5 < m < -\frac{11}{4} \end{cases}$. D. $m < \frac{13}{4}$.

Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Tìm giá trị m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt sao cho tam giác OAB vuông tại A hoặc B .

- A. $m = 1 \pm \sqrt{5}$. B. $m = 1 \pm \sqrt{3}$.
C. $m = 1 \pm \sqrt{2}$. D. $m = 1 \pm \sqrt{6}$.

Câu 41: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 2017$. Định m để phương trình $y' = m^2 - m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; m]$.

- A. $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}; 2\right)$. B. $\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{3}; 2\right)$.
C. $\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{2}; 2\right)$. D. $\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2}; 2\right)$.

Câu 42: Tìm giá trị m không âm sao cho phương trình $x^3 - 3\sqrt{3}x + 2m = 2m$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m > 1$. B. $m \leq 1$. C. $m \geq 2$. D. $m < 2$.

Câu 43: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 2x + 4$ nghịch biến trên $(0; 1)$ và đồng biến trên $(3; 4)$.

- A. $m \in \left(\frac{1}{6}; \frac{25}{18}\right)$. B. $m \in \left[\frac{1}{6}; \frac{23}{12}\right]$.
C. $m \in \left[\frac{1}{6}; \frac{25}{18}\right]$. D. $m \in \left(\frac{1}{6}; \frac{23}{12}\right)$.

Câu 44: Bác An muốn xây một nhà kho hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là $648m^2$ và chiều cao là $4m$. Bên trong nhà kho chia thành 3 phòng hình hộp chữ nhật có các kích thước như nhau, phần diện tích làm cửa là $10m^2$. Tiền công thợ xây mỗi mét vuông tường là 150000 đồng. Bác An đã thiết kế các phòng sao cho tiết kiệm tiền công xây dựng nhất. Số tiền công thợ tối thiểu Bác Chiến phải chi trả để hoàn thiện các bức tường là

- A. 85 800 000 đồng. B. 87 300 000 đồng.
C. 84 900 000 đồng. D. 81 900 000 đồng.

Câu 45: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1 = 1$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2 \neq A_1$ có hoành độ x_2 . Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3 \neq A_2$ có hoành độ x_3 . Cứ tiếp tục như thế, tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n \neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n . Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $x_n > 5^{100}$.

- A. 235. B. 234. C. 118. D. 117.

Câu 46: Xét các số thực với $a \neq 0, b > 0$ sao cho phương trình $ax^3 - x^2 + b = 0$ có ít nhất hai nghiệm thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức a^2b bằng:

- A. $\frac{4}{27}$. B. $\frac{15}{4}$. C. $\frac{27}{4}$. D. $\frac{4}{15}$.

Câu 47: Biết rằng đồ thị của hàm số $y = P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lần lượt có hoành độ là x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị

của $T = \frac{1}{x_1^2 - 4x_1 + 3} + \frac{1}{x_2^2 - 4x_2 + 3} + \frac{1}{x_3^2 - 4x_3 + 3}$?

- A. $T = \frac{1}{2} \left[-\frac{P'(1)}{P(1)} + \frac{P'(3)}{P(3)} \right]$.
B. $T = \frac{1}{2} \left[-\frac{P'(1)}{P(1)} - \frac{P'(3)}{P(3)} \right]$.
C. $T = \frac{1}{2} \left[\frac{P'(1)}{P(1)} - \frac{P'(3)}{P(3)} \right]$.
D. $T = \frac{1}{2} \left[\frac{P'(1)}{P(1)} + \frac{P'(3)}{P(3)} \right]$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1$ với m, n là các tham số thực thỏa mãn $\begin{cases} m+n > 0 \\ 7+2(2m+n) < 0 \end{cases}$. Tìm số cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$.

- A. 11. B. 5. C. 9. D. 2.

Câu 49: Cho $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1} = f(x)+2$ có bao nhiêu nghiệm thực.

- A. 4. B. 6. C. 7. D. 9.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(x) > 1$ và

$$\frac{2f(x)-1}{2mx-1} = \frac{m^2x^2 + \frac{1}{4} + m(1-x)}{f^2(x) - f(x) + m + \frac{1}{4}}.$$

Với $m > 0$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{f(x)-9m+8}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 8. B. 9. C. 6. D. 7.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CHỦ ĐỀ 1

I. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: Bài toán không chứa tham số

Câu 1: Đáp án D.

Cách 1: Cách tư duy.

$$\text{TXĐ: } D = (0; +\infty) \setminus \{1\}.$$

$$\text{Ta có: } y' = \left(\frac{x}{\ln x} \right)' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e;$$

y' không xác định tại $x = 1$

+ $y' > 0 \forall x \in (e; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(e; +\infty)$.

+ $y' < 0 \forall x \in (0; 1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$.

+ $y' < 0 \forall x \in (1; e)$ nên hàm số nghịch biến trên $(1; e)$.

Cách 2: Sử dụng máy tính Casio:

Nhận thấy ở các phương án có các khoảng sau:

$$(0; +\infty); (0; 1); (0; e); (1; e); (e; +\infty).$$

Lúc này ta sử dụng lệnh **MODE** **7** **TABLE** để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số:

$$\text{Nhập vào máy } Fx = \frac{x}{\ln x} :$$

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

Ấn 2 lần **☐** máy hiện Start? Ta chọn $x = 0$, ấn **0** **☐**

End? Ta nhập **(SHIFT)** **(x10²)** (chính là chọn end là e). Do ở đây ta cho chạy từ 0 đến e bởi ta cần xét tính đồng biến nghịch biến trên $(0; +\infty); (0; 1); (0; e); (1; e)$.

Ấn = máy hiện Step? Nhập 0,2, máy hiện như sau:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{F(0)} & \text{F(0.2)} & \text{F(0.4)} & \text{F(0.6)} \\ \hline 0 & -0.124 & -0.436 & -0.585 \\ \hline \end{array}$$

Từ đây ta nhận thấy giá trị của hàm số giảm khi cho x chạy từ 0 đến 1. Vậy hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$; từ đây ta loại A và B. Tiếp theo kéo xuống thì máy hiện:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{F(0.8)} & \text{F(1)} & \text{F(1.2)} & \text{F(1.4)} \\ \hline -0.714 & \text{ERROR} & 0.585 & 1.4 \\ \hline \end{array}$$

Lúc này ta thấy các giá trị của hàm số tiếp tục giảm khi cho x chạy từ 1 đến e . Do vậy hàm số nghịch biến trên $(1; e)$, từ đây ta loại C, chọn D.

Câu 2: Đáp án D.

$$\text{TXĐ: } D = (-1; +\infty) \Rightarrow \text{loại A, C.}$$

$$y' = [x - \ln(x+1)]' = \frac{x}{x+1}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$y' < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$

Cách 2: Sử dụng máy tính Casio bằng lệnh **TABLE** trong **MODE 7** tương tự bài 1.

Câu 3: Đáp án A.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$y' = (x^3 + 3x^2 - 4)' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng N, tức hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$.

Câu 4: Đáp án B.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\text{Ta có } ad - bc = 1 - 2 = -1 < 0$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 5: Đáp án D.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$y' = (-x^3 + 3x^2 + 9x)' = -3x^2 + 6x + 9$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta thấy hàm số có hệ số $a = -1 < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$.

Câu 6: Đáp án D.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$y' = (-x^3 - 6x^2 + 10)' = -3x^2 - 12x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Do hệ số $a = -1 < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-4; 0)$

Câu 7: Đáp án C.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$y' = (x^4 - 2x^2 - 1)' = 4x^3 - 4x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Do hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng W từ đây suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$; hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 8: Đáp án A.

Vì $f'(x) = x^2(x+2) \geq 0 \forall x \in (-2; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

Câu 9: Đáp án B.

Cách suy luận 1:

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$y' = (2x^4 + 1)' = 8x^3, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Vì $y' > 0 \forall x \in (0; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Cách suy luận 2:

Đồ thị hàm số có dạng Parabol có đỉnh là $I(0; 1)$ và hệ số $a = 2 > 0$ nên đồ thị hàm số là Parabol có bề lõm hướng lên, tức hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 10: Đáp án D.

Ở phần sau ta sẽ học về đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương, ở phần dạng đồ thị ta có sơ đồ về dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương. Từ đó ta rút ra nhận xét:

Do hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên đồ thị hàm số không thể có ba điểm cực trị, vậy đồ thị hàm số có dạng parabol quay bề lõm lên trên và có đỉnh là $I(0; c)$.

Áp dụng sơ đồ được giới thiệu ở bài sau để thỏa mãn điều kiện trên thì

$$\begin{cases} a > 0 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

Câu 11: Đáp án D.

Từ việc xem xét sơ đồ tôi giới thiệu ở câu 10 thì ta có:

$$ab = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-2) > 0 \text{ và } a = -\frac{1}{4} < 0 \text{ nên}$$

đồ thị hàm số là parabol quay bề lõm hướng xuống, tức hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 12: Đáp án C.

Phương án A. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = (x^3 - x + 1)' = 3x^2 - 1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$\Rightarrow$ Hàm số này không đồng biến trên tập xác định của nó.

Phương án B. Loại vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Phương án C. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 + 2 > 0 \quad \forall x \in D$$

$\Rightarrow$ Hàm số này đồng biến trên tập xác định của nó.

Câu 13: Đáp án B.

TXĐ: $D = [0; 2]$.

$$y' = \frac{-2x+2}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vì $y' > 0 \quad \forall x \in (0; 1)$ nên hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.

Câu 14: Đáp án D.

$$y' = (\sin x - \cos x + \sqrt{3}x)'$$

$$= \cos x + \sin x + \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right] + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) > 0$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 15: Đáp án A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng W, từ đây suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 16: Đáp án C.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$

$$y' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (không thuộc } D \text{)}$$

Vì $y' < 0 \quad \forall x \in (-\infty; 1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 17: Đáp án A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Mặt khác hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng N, tức hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Câu 18: Đáp án B.

TXĐ: $D = (-2; +\infty)$

$$y' = \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{x-1}{(x+2)^2}$$

Vì $y' > 0 \quad \forall x \in (1; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 19: Đáp án A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Mặt khác hệ số $a = -1 < 0$, suy ra đồ thị hàm số có dạng chữ M, tức hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 20: Đáp án D.

Với các bài toán mà ta khó tính đạo hàm, ta nên dùng TABLE để giải quyết bài toán.

Nhập **MODE** **7** **TABLE**

Nhập như sau:

$$f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$$

Tiếp theo ấn 2 lần dấu =.

Start? ấn -3 =

End? ấn 3 =

Step? 0.5 =

Máy hiện:

Math	Math
$f(-3) = -3.181$	$f(-1) = -4.041$
$f(-2.5) = -3.481$	$f(-2) = -3.366$
$f(-2) = -3.366$	$f(-1.5) = -2.5$
$f(-1.5) = -2.5$	$f(-1) = -4.041$

Math	Math
$f(2.5) = 0.5773$	$f(2) = 0.8728$
$f(2) = 0.8728$	$f(1.5) = 1.0606$
$f(1.5) = 1.0606$	$f(1) = -4.041$

Từ đây ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

Câu 21: Đáp án C

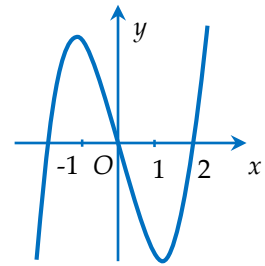
Ta thấy hàm số có

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Mặt khác hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ N, tức hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Câu 22: Đáp án B.

Đây là một bài toán dễ mắc sai lầm, do đồ thị trong hình vẽ



Nhận thấy trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$ thì $f'(x) < 0$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Phân tích sai lầm: Nhiều học sinh tưởng đây là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và chọn luôn D.

Câu 23: Đáp án A.

$$\text{Đạo hàm } y' = -\frac{2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Ta có $y' < 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và

$y' > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$ nên hàm số nghịch

biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và đồng

biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 24: Đáp án B.

– Hàm số dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}, \left(x \neq -\frac{d}{c}\right)$

luôn đơn điệu (đồng biến, hoặc

nghịch biến) trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

Ta loại ngay hai đáp án A và C.

– Với phương án B:

Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 25: Đáp án A.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2);$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do $y' < 0, \forall x \in (0; 2)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 2);$ và

$y' > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$

và $(2; +\infty)$

Câu 26: Đáp án D.

Ở bài toán này, nhiều bạn không nhìn kĩ đề lại đi xét hàm số $f(x) = x^2 + 1$ là sai. Vì đề cho $f'(x)$ chứ không phải $f(x)$.

Ta có $f'(x) = x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đây ta loại A; B; C. Chọn D.

Câu 27: Đáp án C.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y						

Dựa vào BBT, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Dạng 2: Bài toán chứa tham số

Câu 1: Đáp án D.

Đặt $e^x = t (t > 0)$

$$\text{Vì } x \in \left(\ln \frac{1}{4}; 0\right) \Rightarrow t \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$$

$$\Rightarrow m^2 \notin \left(\frac{1}{4}; 1\right) \Rightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y = \frac{t-m-2}{t-m^2}; y' = \frac{-m^2+m+2}{(t-m^2)^2}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\ln \frac{1}{4}; 0\right)$

Khi $y' > 0$ hay

$$-m^2 + m + 2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2$$

$$\text{Vậy } -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2} \text{ hoặc } 1 \leq m < 2.$$

Câu 2: Đáp án A.

Điều kiện: $x \neq m$.

$$y' = \frac{-m-3}{(x-m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow -m-3 > 0 \Leftrightarrow m < -3$.

Câu 3: Đáp án B.

Đặt $\sqrt{x-1} = t$.

$$\text{Vì } x \in (17; 37) \Rightarrow t \in (4; 6) \Rightarrow m \notin (-6; -4)$$

$$y = \frac{(m-1)t+2}{t+m}$$

$$y' = \frac{m^2-m-2}{(t+m)^2}$$

Hàm số đồng biến khi $m^2 - m - 2 > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \end{cases}$$

Kết hợp các điều kiện ta có

$$\begin{cases} m > 2 \\ m \leq -6 \\ -4 \leq m < -1 \end{cases}$$

Câu 4: Đáp án A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}; y' = 3x^2 - 6mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}, \text{ mặt khác hàm số}$$

có hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ N, suy ra hàm số nghịch biến trên $(0; 2m)$.

Vậy để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ thì $2m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$.

Câu 5: Đáp án B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $b^2 - 3ac \leq 0 \Leftrightarrow 0^2 - 3.1.(-3m^2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 \leq 0 \Rightarrow m = 0.$$

Câu 6: Đáp án C.

Để hàm số luôn nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ thì $b^2 - 3ac \leq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (3m+2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1.$$

Câu 7: Đáp án A.

Để hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định thì $(m+1) \cdot (-m) + 2 > 0$

$$\Leftrightarrow -m^2 - m + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < m < 1.$$

Câu 8: Đáp án C.

$$y' = 3x^2 + 6x - m$$

Phương trình $y' = 0$ có

$$\Delta' = b^2 - 3ac = 3^2 - 3.1.(-m) = 9 + 3m$$

Trường hợp 1: đồ thị hàm số có hai điểm cực trị, thì $x = 0$ phải là điểm cực đại, lúc này:

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy hàm số phải luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq -3$

Câu 9: Đáp án C.

Ta có $y' = \cos x + \sin x + 2017\sqrt{2}m$.

$$\text{Ta có } y' = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2017\sqrt{2}m.$$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -2017m \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Điều này xảy ra khi

$$-2017m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2017}.$$

Câu 10: Đáp án C.

Đặt $\sin x = t$

$$\text{Vì } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$$

Hàm số trở thành $y = \frac{2t-1}{t-m}$. Để thỏa

mãn yêu cầu đề bài thì hàm số $y = \frac{2t-1}{t-m}$ phải đồng biến trên $(0; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc = -2m + 1 > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \leq 0.$$

Vì $m \notin (0; 1)$ nên $m \leq 0$.

Câu 11: Đáp án B.

Cách 1: Đạo hàm trực tiếp

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= \left(\frac{\sin x + m}{\sin x - m}\right)' \\ &= \frac{\cos x (\sin x - m) - \cos x (\sin x + m)}{(\sin x - m)^2} \\ &= \frac{-2m \cos x}{(\sin x - m)^2}, \text{ để hàm số nghịch biến} \end{aligned}$$

$$\text{trên } \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \text{ thì } \begin{cases} -2m \cos x < 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases}$$

Do $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $\cos x \in (-1; 0)$, do

vậy để hàm số đã cho nghịch biến trên

$$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \text{ thì } \begin{cases} -2m > 0 \\ m \leq 0 \Leftrightarrow m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$$

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Đặt $\sin x = t$,

$$\text{Vì } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \text{ nên } t \in (0; 1).$$