GIAI ĐOẠN CỔ ĐIỂN

6000 TCN-500

CỔ ĐẠI VÀ

KH. 6000 TCN

Nhiều **lượng** khác nhau **được ghi lại** trên các phiến đất sét Sumer, phiên bản sơ khai của **hệ đếm**.

KH. 4000 TCN

Người Babylon nghĩ ra hệ **đếm cơ số 60**, trong đó **hình nón nhỏ biểu thị 1** và **hình nón lớn biểu thị 60**.

KH. 1650 TCN

Người Ai Cập cổ mô tả **các phương pháp tính diện tích và thể tích** trên cuộn giấy Rhind.

KH. 530 TCN

Pythagoras **thành lập một ngôi trường** để dạy về **các niềm tin siêu hình và phát hiện toán học của ông**, trong đó có định lý Pythagoras.

KH. 430 TCN

Hippasus xứ Metapontum phát hiện **số vô tỉ**, tức là các số không thể viết dưới dạng phân số.

KH. 387 TCN

Plato thành lập **Học viện Athens** – trên cổng vào có dòng "Những kẻ không biết hình học thì không được vào đây".

KH. 300 TCN

Một trong những cuốn sách giáo khoa **giàu ảnh hưởng nhất** từng được viết, *Cơ sở* của Euclid, tổng hợp **các tiến bộ toán học** trong đó có chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên tố.

Từ 40.000 năm về trước, loài người đếm bằng cách đánh dấu lên cành cây và mẩu xương. Họ chắc hẳn đã có một cảm thức thô sơ về con số và số học, nhưng lịch sử toán học chỉ thật sự bắt đầu với sự phát triển của hệ thống chữ số trong những nền văn minh đầu tiên. Hệ thống chữ số xuất hiện sớm nhất là vào thiên niên kỷ VI TCN ở Lưỡng Hà, phía tây châu Á, quê hương của nền nông nghiệp và những thành thị đầu tiên trên thế giới. Ở đây, người Sumer đã phát triển ý tưởng đánh dấu để đếm bằng cách sử dụng những biểu tượng khác để ghi lại những số lượng khác nhau, từ đó, người Babylon lại tiếp tục triển khai thành một hệ đếm tinh vi gồm các ký tự hình nêm (hình mũi nhọn). Từ khoảng năm 1800 TCN, người Babylon đã sử dụng hình học và đại số cơ bản để giải quyết các vấn đề thực tế như xây dựng, làm động cơ và tính toán đất phân lô; bên cạnh đó họ còn sử dụng các kỹ năng số học để thực hành thương mại và đánh thuế.

Một câu chuyện tương tự xuất hiện không lâu sau thời kỳ văn minh của người Ai Cập cổ. Hoạt động buôn bán và thu thuế của người Ai Cập đòi hỏi một hệ đếm tinh vi, và các công trình xây dựng, kỹ thuật của họ phụ thuộc cả vào phương tiện đo lường lẫn một chút kiến thức đại số và hình học. Người Ai Cập cũng có khả năng sử dụng các kỹ năng toán học của mình kết hợp với việc quan sát bầu trời để tính toán và dự đoán các chu kỳ thiên văn, chu kỳ mùa và xây dựng lịch cho các sự kiện tôn giáo và nông nghiệp. Từ khoảng năm 2000 TCN, họ đã xây dựng được ngành nghiên cứu các nguyên tắc số học và hình học.

Tính chặt chẽ trong toán học Hy Lạp

Kể từ thế kỷ VI TCN, tầm ảnh hưởng của Hy Lạp cổ phát triển nhanh chóng, lan tới phía đông Địa Trung Hải. Các học giả Hy Lạp nhanh nhạy hấp thu các ý tưởng toán học của người Babylon và Ai Cập. Người Hy Lạp sử dụng hệ đếm 10 (gồm mười biểu tượng) bắt nguồn từ người Ai Cập. Toán học trở thành trụ cột trong cách tư duy của Hy Lạp cổ điển, phản ánh qua hội họa, kiến trúc và ngay cả triết học. Những tính chất hầu như thần bí của hình học và các con số đã truyền cảm hứng cho Pythagoras và các môn đệ của ông thiết lập một cộng đồng mang hơi hướng của một giáo phái, hăng say nghiên cứu các nguyên tắc toán học mà họ tin là nền tảng của vũ trụ và mọi thứ mà vũ trụ dung chứa.

Apollonius xứ Perga viết bộ sách *Conic*, có **những tiến bộ chủ chốt trong hình học**.

KH. 200 TCN

Người Trung Hoa cổ phát triển một **hệ đếm biểu diễn các số âm và dương** sử dụng các que tre màu đen và đỏ.

KH. 150 TCN

Lưu Huy viết một lời bình quan trọng trong ***Cửu chương toán thuật***, được tổng hợp bởi các học giả Trung Hoa từ thế kỷ X TCN.

263

KH. 250 TCN

Archimedes **tính xấp xỉ số pi** bằng cách **sử dụng các hình đa giác**.

KH. 150 TCN

Hipparchus xứ Nicaea **tổng hợp** các bảng **lượng giác đầu tiên**.

KH. 250

Diophantus phát minh ra **các biểu tượng mới để thay thế cho các bậc lũy thừa chưa biết trong phương trình**, và công bố chúng trong tác phẩm *Số học*.

470

Tổ Xung Chi tính **số pi tới chữ số thập phân thứ bảy**, giữ kỷ lục tính toán trong một thiên niên kỷ.

Trước Pythagoras vài thế kỷ, người Ai Cập đã sử dụng hình tam giác với các cạnh tỷ lệ 3:4:5 làm công cụ trong xây dựng để đo góc vuông. Họ nảy ra ý tưởng này nhờ quan sát và rồi áp dụng quan sát như một nguyên tắc chung, trong khi những người theo trường phái Pythagoras thì tìm cách chứng minh nguyên tắc này một cách chặt chẽ, cung cấp bằng chứng rằng tỷ lệ đó đúng với mọi hình tam giác vuông. Chính quan điểm về bằng chứng và tính chặt chẽ này là đóng góp vĩ đại nhất của người Hy Lạp đối với ngành toán học.

Học viện của Plato ở Athens dành riêng để nghiên cứu triết học và toán học, bản thân Plato cũng mô tả năm khối đa diện Plato (tứ diện đều, hình lập phương, bát diện đều, mười hai mặt đều, và hai mươi mặt đều). Các triết gia khác, đáng chú ý có Zeno xứ Elea, đã áp dụng logic vào cơ sở toán học, phơi bày những vấn đề về quá trình vô hạn và thay đổi. Họ thậm chí còn khám phá ra hiện tượng lạ lùng của số vô tỉ. Với phương pháp phân tích các hình thức logic, học trò của Plato là Aristotle đã tìm ra sự khác biệt giữa suy luận quy nạp (rút ra nguyên tắc chung từ các quan sát) và suy luận diễn dịch (sử dụng các bước có logic để đạt đến một kết luận nhất định từ những tiền đề hoặc giả thuyết có trước).

Từ cơ sở này, Euclid đã đặt ra các nguyên tắc về bằng chứng toán học từ những sự thật hiển nhiên trong cuốn *Cơ sở*, tác phẩm chính luận là nền tảng của toán học trong hai ngàn năm sau đó. Cùng với sự chặt chẽ tương tự, Diophantus đã tiên phong sử dụng các biểu tượng để đại diện cho những số chưa biết trong phương trình; đây là bước đầu tiên đưa đến các ký hiệu tượng trưng trong đại số.

Một mặt trời mới ở phương Đông

Sự thống trị của Hy Lạp cuối cùng cũng phải nằm dưới cái bóng của Đế quốc La Mã đang vươn mình. Người La Mã xem toán học như một thứ công cụ thực tế hơn là một lĩnh vực để nghiên cứu. Cùng lúc đó, những nền văn minh cổ ở Ấn Độ và Trung Hoa cũng độc lập phát triển ra các hệ đếm của riêng họ. Toán học Trung Hoa phát triển đặc biệt rực rỡ trong giai đoạn từ thế kỷ II đến thế kỷ V, phần lớn nhờ vào công trình hiệu đính và mở rộng các văn tự kinh điển trong toán học Trung Hoa của Lưu Huy.■

CÁC CHỮ SỐ CÓ VỊ TRÍ CỦA RIÊNG CHÚNG

SỐ ĐẾM GIÁ TRỊ THEO VỊ TRÍ


2
1
3

BỐI CẢNH

NỀN VĂN MINH TIÊU BIỂU
Babylon

LĨNH VỰC
Số học

TRƯỚC ĐÓ

40.000 năm trước Người ở châu Âu và châu Phi thời Đồ Đá đếm bằng cách đánh dấu lên cành cây hoặc mẩu xương.

3500–3200 TCN Người Sumer phát triển ra các hệ thống tính toán sơ khai để đo đạc đất đai và nghiên cứu bầu trời đêm.

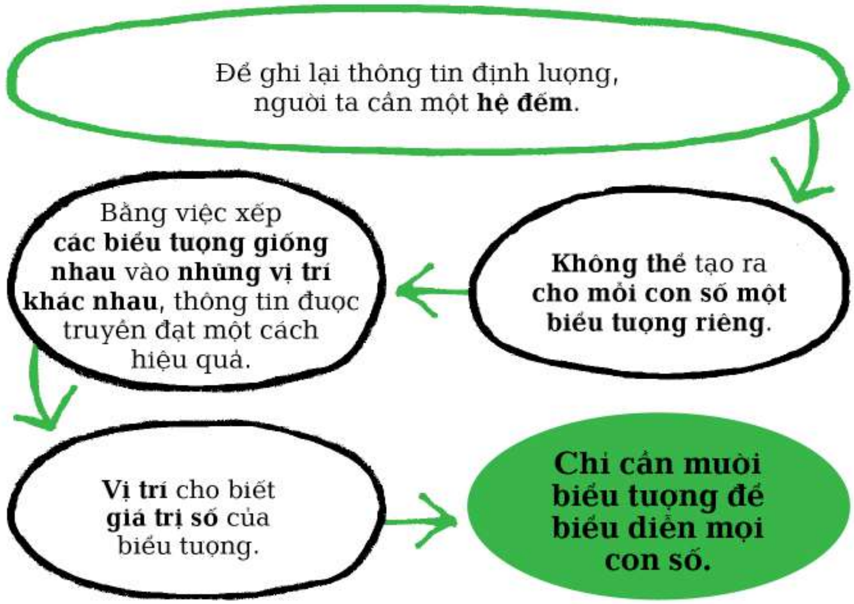
3200–3000 TCN Người Babylon sử dụng một cái nón nhỏ bằng đất sét để đếm 1 và một cái nón lớn để đếm 60, một quả bóng đất sét để đếm 10, hình thành nên hệ đếm 60 của Babylon.

SAU ĐÓ

Thế kỷ II Người Trung Hoa sử dụng bàn tính dùng hệ đếm 10 theo vị trí định lượng.

Thế kỷ VII Ở Ấn Độ, Brahmagupta coi số 0 là một số theo đúng nghĩa của nó, chứ không chỉ là một kiểu ký hiệu vị trí.

> Chúng ta được ban tặng số đếm để tính toán, để cân đong, để đo đạc, để quan sát; số đếm là triết học tự nhiên.
>
> **Voltaire**
> **Triết gia người Pháp**



Người Sumer ở Lưỡng Hà, một nền văn minh cổ nằm giữa hai con sông Tigris và Euphrates nay thuộc Iraq, được biết là những người đầu tiên sử dụng một hệ đếm tiên tiến. Các phiến đất sét của người Sumer từ thiên niên kỷ IV TCN có khắc những biểu tượng biểu đạt những số lượng khác nhau. Trước người Babylon, người Sumer đã cần các công cụ toán học hiệu quả để cai trị các đế chế của họ.

Điều giúp phân biệt người Babylon với những hàng xóm của họ, chẳng hạn như người Ai Cập, là việc họ sử dụng một hệ đếm theo vị trí định lượng. Trong các hệ đếm theo vị trí, giá trị của một số được xác định bởi cả biểu tượng lẫn vị trí của nó. Ví dụ, trong hệ thập phân ngày nay, vị trí của một chữ số trong một số cho biết giá trị của nó thuộc hàng đơn vị (nhỏ hơn 10), hàng chục, hàng trăm hay lớn hơn. Những hệ đếm này giúp việc tính toán hiệu quả hơn vì chỉ cần một nhóm biểu tượng nhỏ là có thể biểu diễn một lượng giá trị lớn. Trái lại, người Ai Cập cổ sử dụng những biểu tượng riêng cho hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn và các giá trị lớn hơn, và họ cũng không có hệ đếm theo vị trí. Để biểu diễn những con số lớn hơn có thể cần ít nhất 50 chữ tượng hình.

Sử dụng các cơ số khác nhau

Hệ ghi số Ấn Độ–Ả Rập được sử dụng ngày nay là hệ cơ số 10 (thập phân). Hệ thập phân chỉ cần 10 biểu tượng – 9 chữ số (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) và một số 0 làm ký hiệu giữ chỗ. Cũng như trong hệ đếm Babylon, vị trí của một chữ số cho biết giá trị của chữ số đó, và chữ số có giá trị nhỏ nhất luôn nằm bên phải. Trong một hệ cơ số 10, một số có hai chữ số, chẳng hạn như số 22, được biểu diễn thành $(2 \times 10^1) + 2$; giá trị của chữ số 2 bên trái lớn gấp mười lần chữ số 2 bên phải. Đặt các chữ số đúng sau số 22 sẽ tạo ra số trăm, số ngàn, và các chữ số lớn hơn theo giá trị số mũ của 10. Biểu tượng đứng sau một số nguyên (ký hiệu tiêu chuẩn hiện nay là dấu thập phân) cũng có thể tách số đó khỏi các hàng ở phần phân số của nó, mỗi hàng biểu diễn diễn giá trị bằng

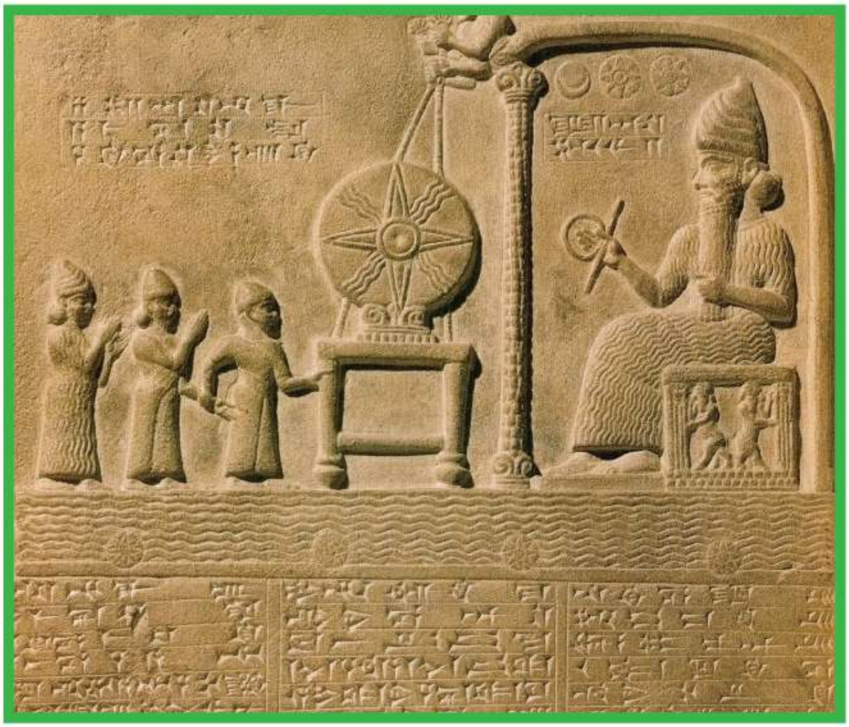
Xem thêm: Cuộn giấy Rhind 32–33 ▪ Bàn tính 58–59 ▪ Số âm 76–79 ▪ Số 0 88–91 ▪ Dãy Fibonacci 106–111 ▪ Số thập phân 132–137

một phần mười giá trị của hàng liền trước. Người Babylon nghĩ ra hệ đếm lục thập phân (cơ số 60) phức tạp hơn, có lẽ được truyền lại từ những người Sumer đi trước và ngày nay vẫn còn được sử dụng trên khắp thế giới để đo thời gian, số đo độ trong một đường tròn ($360° = 6 \times 60$), và tọa độ địa lý. Vẫn chưa rõ vì sao họ lại sử dụng 60 làm cơ số. Số 60 được chọn có lẽ vì nó có thể chia hết cho nhiều số khác như 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 và 30. Người Babylon cũng tạo ra năm niên lịch dựa theo năm mặt trời (365,24 ngày); số ngày trong một năm là 360 (6×60) với các ngày cộng thêm cho dịp lễ hội.

Trong hệ lục thập phân của người Babylon, một biểu tượng duy nhất được sử dụng riêng và lặp lại tới chín lần để biểu diễn các số từ 1 tới 9. Với số 10, họ sử dụng một biểu tượng khác, đặt ở bên trái của biểu tượng đại diện cho số 1, và lặp lại hai tới năm lần cho đến số 59. Với số 60 (60×1), người ta sử dụng lại biểu tượng của số 1 nhưng lùi xa về phía bên trái hơn số 1. Vì là hệ cơ số 60, nên hai biểu tượng như vậy sẽ thành số 61, còn ba biểu tượng như vậy thì thành số 3.661, nghĩa là 60×60 (60^2) + 60 + 1.

Hệ cơ số 60 có những hạn chế rõ rệt. Hệ này cần rất nhiều biểu tượng so với hệ cơ số 10. Trong hàng thế kỷ, hệ lục thập phân cũng không có ký hiệu giữ giá trị vị trí, và chẳng có gì để tách số nguyên khỏi phần thập phân. Tuy nhiên, đến khoảng năm 300 TCN, người Babylon đã sử dụng hai hình nêm

Thần mặt trời Shamash của người Babylon trao thưởng một cái roi và một cuộn dây, các công cụ đo đạc cổ, cho các đạc điền viên mới được đào tạo, tranh trên một phiến đất sét có từ khoảng năm 1000 TCN.

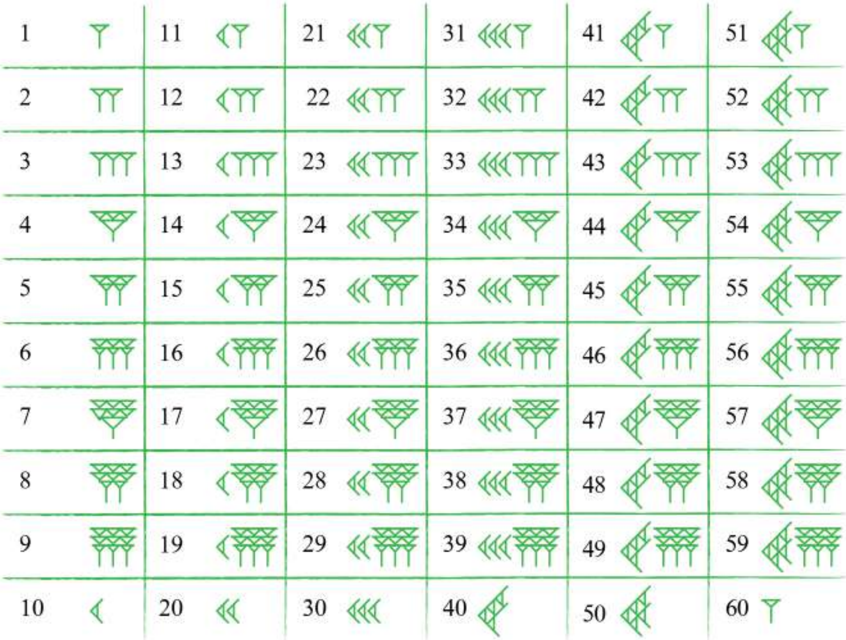


Chữ hình nêm

Cuối thế kỷ XIX, các học giả đã giải mã được những vết khắc hình nêm (hình đầu nhọn) trên các phiến đất sét được khôi phục từ các địa điểm khảo cổ Babylon ở Iraq và vùng lân cận. Những vết khắc này, biểu thị chữ cái và từ ngữ cũng như một hệ số tiên tiến, được khắc vào đất sét ẩm bằng đầu của một dụng cụ viết. Giống như người Ai Cập, người Babylon cũng cần các thư lại cai quản xã hội phức tạp của họ, và nhiều phiến đất sét có chứa những ghi chép toán học được cho là đến từ các trường đào tạo thư lại.

Hiện nay người ta đã khám phá ra rất nhiều điều về toán học thời Babylon, đa dạng như phép nhân, phép chia, hình học, phân số, căn bậc hai, căn bậc ba, phương trình và các dạng khác bởi – khác với các cuộn giấy của người Ai Cập – các phiến đất sét tồn tại lâu hơn. Vài ngàn phiến đất sét, hầu hết có niên đại từ năm 1800 đến 1600 TCN, được lưu trữ tại các bảo tàng trên thế giới.

Hình nêm, trong tiếng Latinh là *cuneus* ("đầu nhọn"), mô tả hình dạng của các biểu tượng, được khắc vào đất sét ẩm, đá, hoặc kim loại.



Hệ đếm cơ số 60 của người Babylon gồm hai biểu tượng – một biểu tượng duy nhất, được sử dụng độc lập hoặc kết hợp với chính nó để biểu diễn các số từ 1 tới 9; và biểu tượng cho số 10, được lặp lại để thể hiện số 20, 30, 40 và 50.

để biểu thị giá trị rỗng, rất giống với cách chúng ta dùng số 0 làm ký hiệu giữ chỗ ngày nay; đây có lẽ là tác dụng xuất hiện sớm nhất của số 0.

Các hệ đếm khác

Vào thiên niên kỷ I TCN, ở Lưỡng Hà, bờ bên kia địa cầu, nền văn minh Maya đã phát minh ra hệ đếm tiên tiến của riêng họ – trong khi hoàn toàn cô lập với thế giới bên ngoài. Đây là hệ cơ số 20 (nhị thập phân), có lẽ được phát triển từ phép đếm đơn giản sử dụng ngón tay và ngón chân. Trên thực tế, các hệ cơ số 20 được sử dụng trên khắp thế giới, ở châu Âu, châu Phi và châu Á. Ngôn ngữ thường chứa đựng những dấu vết còn lại của hệ đếm này. Ví dụ như trong tiếng Pháp, 80 là *quatre-vingt* (4 × 20); các ngôn ngữ Wales và Ireland cũng có cách đọc một vài con số theo tích của 20; trong tiếng Anh, 20 còn có cách đọc "score". Ví dụ, trong Kinh Thánh, Thi Thiên 90 nói tuổi thọ của loài người là "threescore years and ten" (bảy mươi) hoặc lớn lắm thì "fourscore years" (tám mươi).

Từ khoảng năm 500 TCN đến thế kỷ XVI khi chữ số Ấn Độ–Ả Rập được chính thức áp dụng ở Trung Hoa, người Trung Hoa đã sử dụng chữ số hình que để biểu diễn các số. Đây là hệ thập phân giá trị theo vị trí đầu tiên. Bằng cách thay số lượng của các que đếm dọc với các que đếm ngang, hệ này có thể biểu diễn giá trị đơn vị, giá trị chục, giá trị trăm, giá trị ngàn, và các giá trị lớn hơn là số mũ của 10, rất giống với hệ thập phân ngày nay. Chẳng hạn, 45 được viết bằng bốn que ngang biểu diễn 4×10^1 (40) và năm que dọc biểu diễn 5×1 (5). Tuy nhiên, bốn que dọc theo sau bởi năm que dọc biểu diễn 405 (4×100, hay 10^2) $+ 5 \times 1$ – sự vắng mặt của các que ngang cho biết không có giá trị chục trong số. Các phép tính được thực hiện bằng cách di chuyển que đếm trên một bảng đếm. Số âm và số dương được biểu diễn lần lượt bằng que đỏ và que đen hoặc các mặt cắt khác nhau (hình tam giác và hình chữ nhật). Đôi khi, chữ số hình que vẫn được sử dụng ở Trung Hoa, cũng như chữ số La Mã thỉnh thoảng được sử dụng trong xã hội phương Tây.

Hệ đếm giá trị theo vị trí của Trung Hoa được thể hiện trong bàn tính. Bàn tính xuất hiện ít nhất từ năm 200 TCN, là một trong những công cụ đếm gẩy hạt lâu đời nhất, mặc dù người La Mã cũng sử dụng một số loại công cụ tương tự. Phiên bản bàn tính của Trung Hoa, ngày nay vẫn còn được sử dụng, có một thanh ngang và nhiều cột dọc để tách giá trị đơn vị, chục, trăm… Ở mỗi cột, có hai hạt phía trên thanh ngang, mỗi hạt giá trị năm, và năm hạt phía dưới thanh ngang, mỗi hạt giá trị một.

Vào thế kỷ XIV, người Nhật Bản đã du nhập bàn tính Trung Hoa và phát triển nên bàn tính soroban của riêng họ. Trong mỗi cột của soroban, phía trên thanh ngang có một hạt giá trị năm và phía dưới thanh ngang có bốn hạt giá trị một. Ngày nay Nhật Bản

> Nền văn minh Babylon và Assyria đã biến mất… nhưng toán học Babylon vẫn còn sức hấp dẫn, và hệ 60 của Babylon vẫn được sử dụng trong thiên văn học.
>
> **G. H. Hardy**
>
> **Nhà toán học người Anh**

> Việc chúng ta sử dụng số 10 thay vì số nào khác đơn thuần là hệ quả từ đặc điểm giải phẫu của chúng ta. Chúng ta đếm bằng mười ngón tay.
>
> **Marcus du Sautoy**
>
> **Nhà toán học người Anh**

vẫn sử dụng soroban: thậm chí còn có những cuộc thi để người trẻ thể hiện khả năng trí tuệ trong việc tính toán bằng soroban, một kỹ năng được gọi là *anzan*.

Ebisu, thần bảo trợ ngư nghiệp và cũng là một trong bảy vị thần may mắn của Nhật Bản, sử dụng một bàn tính soroban để tính toán lợi nhuận trong bức tranh *Giấc mơ Cá hồng* của Utagawa Toyohiro.

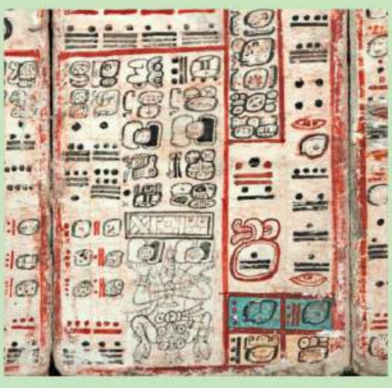
Phép đếm hiện đại

Hệ thập phân Ấn Độ–Ả Rập được sử dụng trên khắp thế giới ngày nay có nguồn gốc từ Ấn Độ. Từ thế kỷ I tới IV, người Ấn Độ đã phát minh ra việc sử dụng chín biểu tượng cùng với số 0 để viết bất kỳ con số nào một cách hiệu quả, thông qua áp dụng giá trị vị trí. Vào thế kỷ IX, các nhà toán học Ả Rập đã du nhập và điều chỉnh hệ đếm này. Họ thêm vào dấu thập phân để hệ cũng có thể biểu diễn phần thập phân của các số nguyên.

Ba thế kỷ sau, Leonardo xứ Pisa (Fibonacci) đã phổ biến việc sử dụng số đếm Ấn Độ–Ả Rập ở châu Âu thông qua cuốn sách *Liber Abaci* (1202) của ông. Song cuộc tranh luận về việc nên sử dụng hệ đếm mới thay cho hệ đếm và các phép đếm truyền thống của La Mã đã có vài trăm năm trước khi du nhập hệ Ấn Độ–Ả Rập, đã dọn đường cho những tiến bộ của toán học hiện đại.

Với sự ra đời của những chiếc máy tính điện tử, các hệ cơ số khác trở nên quan trọng – đặc biệt là hệ nhị phân, một hệ đếm với cơ số 2. Không như hệ cơ số 10 với 10 biểu tượng, hệ nhị phân chỉ có hai biểu tượng: 1 và 0. Hệ nhị phân là hệ giá trị theo vị trí nhưng thay vì là số mũ của 10, mỗi cột có giá trị là số mũ của 2, còn được biểu diễn dưới dạng 2^1, 2^2, 2^3… Trong hệ nhị phân, 111 được biểu diễn thành $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, tức là 4 + 2 + 1, hay bằng 7 trong hệ thập phân.

Trong hệ nhị phân cũng như trong tất cả các hệ đếm hiện đại bất kể cơ số bao nhiêu, các nguyên tắc về giá trị theo vị trí luôn giống nhau. Giá trị theo vị trí – di sản của người Babylon – vẫn là một cách thức hiệu quả, dễ hiểu và bao quát để biểu diễn các số lớn. ■



Cổ văn Dresden, cuốn sách lâu đời nhất còn sót lại của người Maya, có niên đại từ khoảng thế kỷ XIII hoặc XIV, vẽ các biểu tượng số và ký tự của người Maya.

Hệ đếm của người Maya

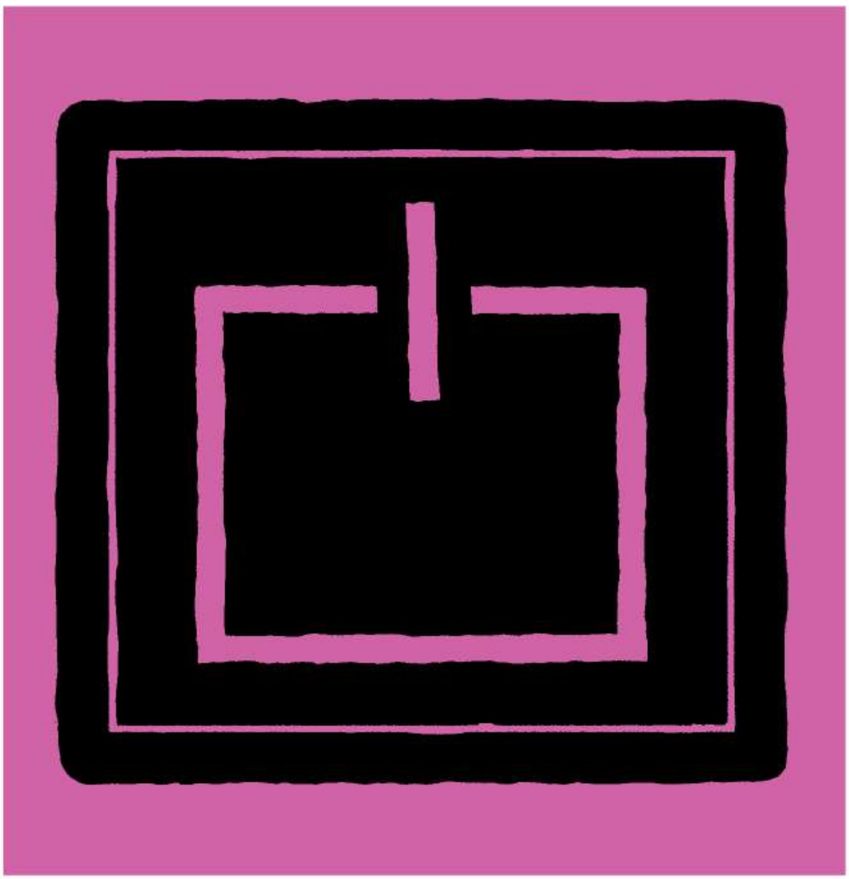
Người Maya, sống ở Trung Mỹ từ khoảng năm 2000 TCN, đã sử dụng một hệ đếm cơ số 20 (nhị thập phân) từ khoảng năm 1000 TCN để thực hiện các tính toán cho thiên văn học và niên lịch. Giống như người Babylon, họ sử dụng lịch 360 ngày cộng với các ngày lễ hội để ứng với 365,24 ngày theo năm mặt trời; lịch này giúp họ xác định chu kỳ phát triển của vụ mùa.

Hệ đếm Maya sử dụng các biểu tượng gồm: một chấm đại diện cho một và một thanh đại diện cho năm. Bằng cách sử dụng kết hợp các chấm bên trên các thanh, họ có thể tạo ra các số đếm từ 1 đến 19. Những số lớn hơn 19 được viết dọc, với những số nhỏ nhất ở dưới cùng, và cũng có bằng chứng cho thấy người Maya đã có những phép tính lên tới hàng trăm triệu. Một bản khắc từ năm 36 TCN cho thấy họ đã sử dụng một biểu tượng hình vỏ sò để ghi số 0, và điều này được sử dụng rộng rãi đến thế kỷ IV.

Hệ đếm của người Maya được sử dụng ở Trung Mỹ cho đến khi người Tây Ban Nha xâm lược vào thế kỷ XVI. Tuy nhiên, tầm ảnh hưởng của hệ đếm này chưa bao giờ lan rộng.

HÌNH VUÔNG CÓ QUYỀN LỰC TỐI THƯỢNG

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI



BỐI CẢNH

NỀN VĂN MINH TIÊU BIỂU
Ai Cập (kh.2000 TCN)
Babylon (kh.1600 TCN)

LĨNH VỰC
Đại số

TRƯỚC ĐÓ
kh.2000 TCN Cuộn giấy Berlin ghi lại một phương trình bậc hai được giải vào thời Ai Cập cổ.

SAU ĐÓ
Thế kỷ VII Nhà toán học người Ấn Độ Brahmagupta giải các phương trình bậc hai chỉ sử dụng các số nguyên dương.

Thế kỷ X Học giả Ai Cập Abu Kamil Shuja ibn Aslam sử dụng các số vô tỉ và số âm để giải phương trình bậc hai.

1545 Nhà toán học người Ý Gerolamo Cardano xuất bản cuốn *Ars Magna*, đặt ra các quy tắc đại số.

Phương trình bậc hai là phương trình liên quan đến các số chưa biết có số mũ là 2, không có số mũ cao hơn; phương trình bậc hai chứa x^2, không chứa x^3, x^4, x^n. Một trong những khả năng cơ bản của toán học là sử dụng phương trình để tìm ra giải pháp cho những vấn đề thực tiễn. Khi những vấn đề đó liên quan tới diện tích hay đường cong chẳng hạn như đường parabol, phương trình bậc hai trở nên rất hữu dụng và mô tả được những hiện tượng vật lý, ví dụ như đường bay của một quả bóng hoặc tên lửa.

Nguồn gốc cổ xưa

Lịch sử của phương trình bậc hai

Xem thêm: Số vô tỉ 44–45 ▪ Số âm 76–79 ▪ Phương trình Diophantus 80–81 ▪ Số 0 88–91 ▪ Đại số 92–99 ▪ Định lý nhị thức 100–101 ▪ Phương trình bậc ba 102–105 ▪ Số ảo và số phức 128–131

Các phương trình bậc hai chứa **lũy thừa bậc hai**, nên chúng được sử dụng khi tính toán bề mặt **hai chiều**.

Số lượng chiều bằng với **số đáp án thực tối đa** có trong một phương trình.

Có tối đa **hai đáp án thực** trong một **phương trình bậc hai, ba** đáp án thực trong một phương trình bậc ba…

Nếu một phương trình bậc hai, hay bất kỳ phương trình nào, **bằng không** (ví dụ $x^2 + 3x + 2 = 0$), **đáp án của phương trình được gọi là nghiệm**.

Trong một phương trình bậc hai, **hai nghiệm** này là hai điểm mà đường cong bậc hai **cắt trục x** của đồ thị.

Năm 1900, nhà Ai Cập học người Đức Hans Schack-Schackenburg đã sao lại và công bố cuộn giấy Berlin. Cuộn giấy có hai bài toán, một trong số đó là phương trình bậc hai.

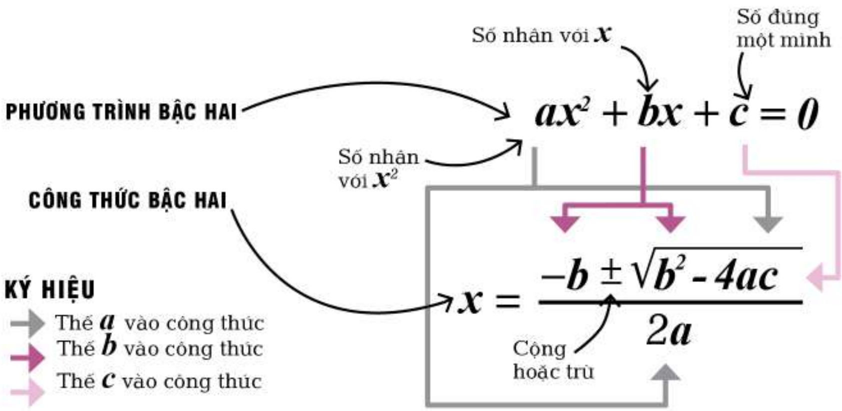
có trên khắp thế giới. Dường như những phương trình này ban đầu xuất hiện do nhu cầu chia đất vì mục đích thừa kế, hoặc để giải quyết các bài toán liên quan đến tổng và tích.

Một trong những ví dụ lâu đời nhất về phương trình bậc hai đến từ bản văn cổ của người Ai Cập gọi là cuộn giấy Berlin (kh.1800 TCN). Bài toán có những thông tin sau: diện tích của một hình vuông 100 cubit (đơn vị đo chiều dài của người Ai Cập cổ, 1 cubit = 0,4572 m) tương đương với diện tích của hai hình vuông nhỏ hơn. Cạnh của một trong hai hình vuông nhỏ hơn bằng với một phần hai cộng một phần tư cạnh của hình vuông nhỏ hơn còn lại. Sử dụng ký hiệu hiện đại, thông tin trên sẽ chuyển thành hệ hai phương trình: $x^2 + y^2 = 100$ và $x = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})y = \frac{3}{4}y$. Hệ này có thể được đơn giản hóa thành phương trình bậc hai $(\frac{3}{4}y)^2 + y^2 = 100$ để tìm ra chiều dài cạnh của mỗi hình vuông.

Người Ai Cập sử dụng phương pháp "đặt tạm" để tìm lời giải. Trong phương pháp này, nhà toán học chọn một con số thuận tiện, thường là số dễ tính toán, rồi tìm lời giải cho phương trình bằng cách sử dụng con số đó. Kết quả chỉ ra cách điều chỉnh con số để cho lời giải chính xác với phương trình. Ví dụ, trong bài toán ở cuộn giấy Berlin, chiều dài dễ dùng nhất cho hình vuông lớn hơn trong hai hình vuông là 4, vì bài toán có thông tin $\frac{1}{4}$. Với cạnh của hình vuông nhỏ nhất, người ta dùng số 3 vì cạnh của nó bằng $\frac{3}{4}$ cạnh của hình vuông kia. Hai hình vuông giả thiết sử dụng hai con số đặt tạm này lần lượt có diện tích là 16 và 9, khi cộng với nhau cho tổng diện tích bằng 25. 25 chỉ bằng $\frac{1}{4}$ của 100, nên diện tích đúng phải gấp bốn lần mới thỏa phương trình trong cuộn giấy Berlin. Vì thế phải nhân đôi chiều dài hai cạnh hình vuông đặt tạm là 4 và 3 thì mới ra được đáp án là 8 và 6.

Các ghi chép sơ khai khác về phương trình bậc hai cũng được tìm thấy trên các phiến đất sét của người Babylon, trong đó đã tính toán đường chéo của hình vuông đơn vị cho ra số có tới năm chữ số

Công thức bậc hai là một cách để giải phương trình bậc hai. Theo quy ước hiện đại, các phương trình bậc hai có một số a nhân với x^2; một số b nhân với x; và một số c đứng một mình. Ảnh minh họa bên dưới trình bày công thức sử dụng a, b và c để tìm giá trị của x. Các phương trình bậc hai thường bằng 0, bởi vì như vậy thì dễ vẽ đồ thị hơn; đáp án x là các điểm mà đường cong đồ thị cắt tại trục x.



ở phần thập phân. Phiến đất sét Babylon YBC 7289 (kh.1800–1600 TCN) chỉ ra phương pháp giải phương trình bậc hai $x^2 = 2$ bằng cách vẽ các hình chữ nhật và chia chúng thành các hình vuông. Vào thế kỷ VII, nhà toán học người Ấn Độ Brahmagupta đã viết một công thức để giải phương trình bậc hai có thể áp dụng để giải các phương trình ở dạng $ax^2 + bx = c$. Các nhà toán học thời đó không sử dụng chữ cái hay biểu tượng, nên ông đã diễn giải công thức của mình bằng từ ngữ, nhưng công thức của ông cũng tương tự với công thức hiện đại đã nêu ở trên.

Vào thế kỷ VIII, nhà toán học người Ba Tư al-Khwarizmi đã dùng cách giải hình học cho phương trình bậc hai gọi là hoàn thiện hình vuông. Cho tới thế kỷ X, cách giải hình học vẫn thường được sử dụng, vì phương trình bậc hai có tính ứng dụng trong xử lý những vấn đề thực tế liên quan đến đất đai hơn là những bài toán đại số trừu tượng.

Đáp án âm

Cho tới lúc đó, các học giả Ấn Độ, Ba Tư và Ả Rập vẫn chỉ sử dụng các số dương. Khi giải phương trình $x^2 + 10x = 39$, họ cho ra đáp án bằng 3. Tuy nhiên, đây mới chỉ là một trong hai đáp án đúng của bài toán; đáp án còn lại là –13. Nếu x bằng –13, thì $x^2 = 169$ và $10x = -130$. Thêm một số âm cho ra kết quả giống với khi trừ đi số dương tương tự, nên $169 + -130 = 169 - 130 = 39$.

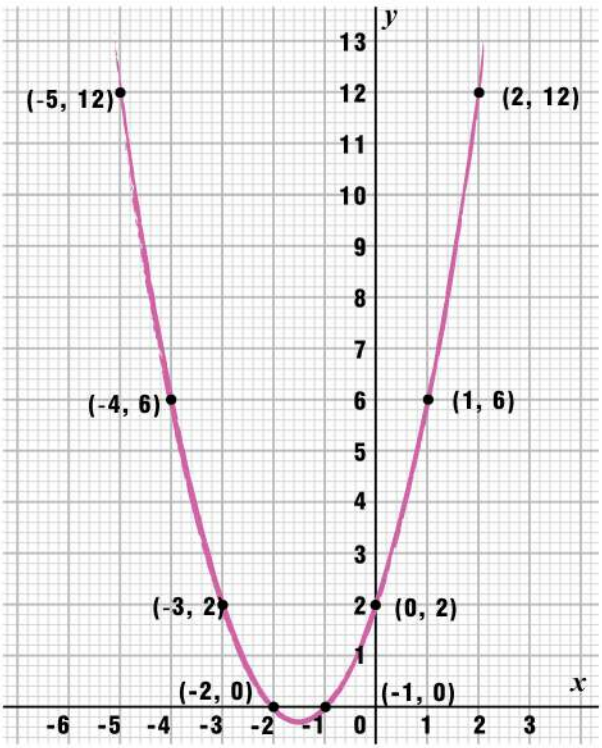
Vào thế kỷ X, học giả người Ai Cập Abu Kamil Shuja ibn Aslam đã sử dụng số âm và các số vô tỉ (chẳng hạn như căn bậc hai của 2) vừa làm đáp án vừa làm hệ số (số nhân trong một vài số hạng của một biểu thức). Đến thế kỷ XVI, hầu hết các nhà toán học đều chấp nhận đáp án số âm và đã quen với nghiệm vô tỉ của căn (những số không thể viết chính xác tuyệt đối phần thập phân). Các nhà toán học cũng bắt đầu sử dụng các số và biểu tượng thay cho việc diễn giải phương trình bằng lời. Giờ đây, ký hiệu âm hoặc dương ± được tận dụng trong giải phương trình bậc hai. Với phương trình $x^2 = 2$, đáp án không chỉ là $x = \sqrt{2}$ mà là $x = \pm\sqrt{2}$. Ký hiệu âm hoặc dương được thêm vào bởi vì hai số âm nhân với nhau cho ra một số dương. $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, $-\sqrt{2} \times -\sqrt{2} = 2$.

Năm 1545, học giả người Ý Gerolamo Cardano đã xuất bản *Ars Magna* (*Nghệ thuật vĩ đại hay những nguyên tắc đại số*) trong đó ông khám phá bài toán: "Cặp số nào có tổng bằng 10 và tích bằng 40?" Ông nhận thấy bài toán dẫn đến một phương trình bậc hai mà khi hoàn thiện cho kết quả $\sqrt{(-15)}$. Các nhà toán học thời đó tin rằng không có số âm nào khi nhân với chính nó cho ra một số âm, nhưng Cardano gợi ý tạm ngừng tin vào điều đó và tiếp tục nghiên cứu căn bậc hai của –15 để tìm ra hai đáp án cho phương trình. Về sau, những số như $\sqrt{(-15)}$ được gọi là số "ảo".

Cấu trúc của các phương trình

Phương trình bậc hai hiện đại thường có dạng $ax^2 + bx + c = 0$. Các chữ cái a, b và c đại diện cho các số đã biết, còn x đại diện cho số chưa biết. Các phương trình chứa ẩn (ký hiệu cho số chưa biết), hệ số, hằng số (số không nhân với ẩn), và các toán tử (các ký hiệu như dấu cộng và dấu bằng). Hạng tử là các phần được tách nhau bởi toán tử; hạng tử có thể là một số hoặc ẩn, hoặc kết hợp cả hai. Phương trình bậc hai hiện đại có bốn hạng tử: ax^2, bx, c và 0.

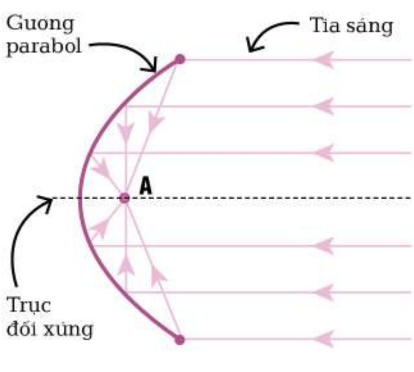
> Chính trị tồn tại nhất thời, còn phương trình tồn tại mãi mãi.
> **Albert Einstein**



Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ tạo ra một đường cong hình chữ *U* gọi là parabol. Đồ thị này đi qua các điểm (chấm màu đen) của hàm số bậc hai khi $a = 1$, $b = 3$ và $c = 2$. Đồ thị được biểu diễn dưới dạng phương trình bậc hai $x^2 + 3x + 2 = 0$. Đáp án x là các điểm có $y = 0$ và đường cong cắt trục x. Đó là –2 và –1.

Parabol

Hàm số là nhóm các hạng tử xác định mối quan hệ giữa các ẩn (thường là x và y). Hàm số bậc hai thường được viết dưới dạng $y = ax^2 + bx + c$, khi biểu diễn trên đồ thị sẽ là đường cong parabol (xem hình trên). Khi phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ tồn tại các đáp án thực (không phải số ảo), các đáp án này sẽ là hai nghiệm – hai điểm giao giữa parabol và trục x. Không phải parabol nào cũng cắt trục x tại hai điểm. Nếu parabol chỉ tiếp xúc với trục x một lần, điều này nghĩa là phương trình có nghiệm trùng nhau (hai đáp án giống nhau). Phương trình đơn giản nhất của dạng này là $y = x^2$. Nếu parabol không tiếp xúc hoặc cắt trục x thì phương trình không có nghiệm thực. Parabol có ích trong thế giới thật vì chúng có tính phản xạ. Chảo vệ tinh có hình dạng parabol là vì vậy. Tín hiệu được chảo thu nhận sẽ phản xạ theo hình parabol và được hướng vào một điểm là đầu thu. ■



Các vật thể hình parabol có tính chất phản xạ đặc biệt. Với một chiếc gương parabol, bất kỳ tia sáng nào song song với trục đối xứng của gương sẽ phản xạ từ bề mặt gương đến cùng một điểm cố định (A).

Ứng dụng thực tiễn

Mặc dù ban đầu được ứng dụng cho các bài toán hình học, ngày nay phương trình bậc hai cũng quan trọng trong nhiều khía cạnh khác của toán học, khoa học và công nghệ. Chẳng hạn, người ta có thể dựng mô phỏng chuyển động ném xiên bằng các phương trình bậc hai. Một vật thể được phóng vào không trung sẽ rơi xuống do trọng lực. Hàm số bậc hai có thể dự đoán chuyển động ném xiên – chiều cao đạt được theo thời gian. Phương trình bậc hai được sử dụng để xây dựng mối liên hệ giữa thời gian, tốc độ và khoảng cách, và trong tính toán các vật thể hình parabol như thấu kính. Phương trình bậc hai còn có thể được sử dụng để dự đoán lời và lỗ trong kinh doanh. Lợi nhuận là tổng doanh thu trừ đi chi phí sản xuất; các công ty tạo ra một phương trình bậc hai gọi là hàm số lợi nhuận với các ẩn để tìm ra giá bán tối ưu nhằm tối đa hóa lợi nhuận.

Các chuyên gia quân sự dùng phương trình bậc hai để tính quỹ đạo phóng đạn pháo – ví dụ tên lửa phòng không MIM-104 Patriot trong hình, thường được Lục quân Mỹ sử dụng.

TÍNH TOÁN CHÍNH XÁC ĐỂ TÌM HIỂU TẤT CẢ MỌI THỨ

CUỘN GIẤY RHIND

BỐI CẢNH

NỀN VĂN MINH TIÊU BIỂU
Ai Cập cổ đại (kh.1650 TCN)

LĨNH VỰC
Số học

TRƯỚC ĐÓ
kh.2480 TCN Các vết khắc trên đá ghi lại mục nước sông Nile, được đo bằng đơn vị cubit – khoảng 52 cm – và gan bàn tay – khoảng 7,5 cm.

kh.1850 TCN Cuộn giấy Moscow tìm ra đáp án cho 25 bài toán, trong đó có cách tính diện tích bề mặt bán cầu và thể tích kim tự tháp.

SAU ĐÓ
kh.1800 TCN Cuộn giấy Berlin được tạo ra. Cuộn giấy cho thấy người Ai Cập cổ đã sử dụng phương trình bậc hai.

Thế kỷ VI TCN Nhà khoa học người Hy Lạp Thales đến Ai Cập và nghiên cứu các lý thuyết toán của vương quốc này.

Cuộn giấy Rhind trong Bảo tàng Anh ở London là một tư liệu toán học hấp dẫn viết bằng tiếng Ai Cập cổ. Được nhà khảo cổ học người Scotland Alexander Henry Rhind mua ở Ai Cập vào năm 1858 và được đặt theo tên ông, cuộn giấy được sao lại từ những tài liệu có trước bởi một thư lại tên là Ahmose vào hơn 3.500 năm trước đó. Cuộn giấy rộng 32 cm và dài 200 cm, có 84 bài toán thuộc số học, đại số, hình học và đo lường. Các bài toán được ghi lại trong cuộn giấy Rhind và các đồ tạo tác cổ khác của Ai Cập như cuộn giấy Moscow trước đó, minh họa các kỹ thuật tính diện tích, tỷ lệ và thể tích.

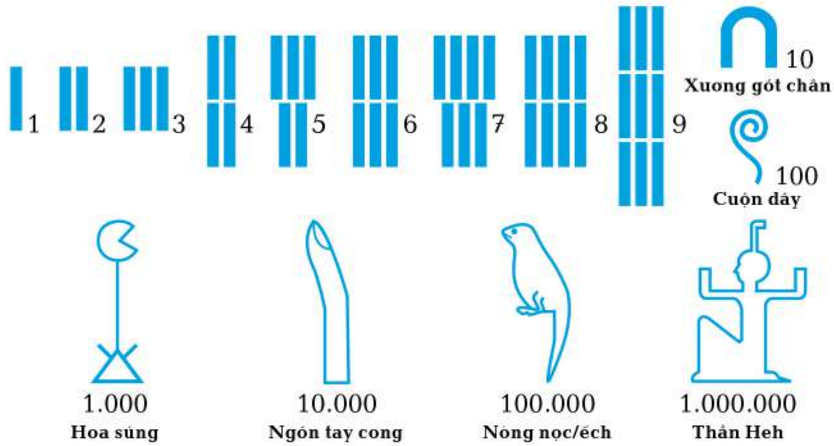
Con mắt của Horus, một vị thần Ai Cập, là biểu tượng của quyền lực và sự bảo vệ. Các phần của con mắt cũng được dùng để biểu diễn các phân số có mẫu số là số mũ của 2. Ví dụ, cầu mắt biểu diễn $\frac{1}{4}$, còn lông mày là $\frac{1}{8}$.

Biểu diễn các khái niệm

Hệ đếm Ai Cập là hệ thập phân đầu tiên. Hệ sử dụng các nét phết làm số có một chữ số và một biểu tượng khác làm các số là số mũ của 10. Sau đó, các biểu tượng được lặp lại để tạo ra các số khác. Phân số được viết dưới dạng số có một chấm trên đầu. Khái niệm phân số của người Ai Cập rất gần với phân số đơn vị là $\frac{1}{n}$, trong đó n là một số nguyên dương. Khi một phân số được nhân đôi, nó phải được viết lại dưới dạng một phân số đơn vị cộng với một phân số đơn vị khác; chẳng hạn, $\frac{2}{3}$ trong ký hiệu hiện đại sẽ là $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ trong ký hiệu của người Ai Cập (không phải $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ bởi vì người Ai Cập không cho phép lặp lại cùng một phân số).

84 bài toán trong cuộn giấy Rhind minh họa các phương pháp toán học phổ biến ở Ai Cập cổ. Chẳng hạn, bài toán 24 hỏi số nào khi cộng với $\frac{1}{7}$ của chính nó thì bằng 19. Viết theo ký hiệu ngày nay sẽ là $x + \frac{x}{7} = 19$. Cách tiếp cận được áp dụng với bài toán 24 gọi là "thế sai". Kỹ thuật này – được sử dụng phổ biến tới tận thời Trung cổ – dựa trên việc

Xem thêm: Số đếm giá trị theo vị trí 22–27 ▪ Pythagoras 36–43 ▪ Tính số pi 60–65 ▪ Đại số 92–99 ▪ Số thập phân 132–137



Người Ai Cập cổ sử dụng các đường dọc để ký hiệu các số từ 1 tới 9. Các số là lũy thừa của mười, nhất là những số được khắc lên đá, được biểu diễn bằng chữ tượng hình.

thử và cải thiện, chọn giá trị đơn giản nhất, hay "sai", cho ẩn và điều chỉnh giá trị bằng cách sử dụng hệ số tỷ lệ (tổng trong đề bài chia cho tổng có được khi thế giá trị "sai").

Để giải bài toán 24, số 7 là phù hợp nhất với một phần bảy, nên người ta ngay lập tức dùng số 7 làm giá trị "sai" cho ẩn. Kết quả của phép tính – 7 cộng $\frac{7}{7}$ (hay 1) – bằng 8, không phải 19, nên cần có hệ số tỷ lệ. Để tìm đáp án đúng từ số 7, người ta chia 19 cho 8 (tổng "sai"). Phép chia này cho kết quả $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ (không phải $2\frac{3}{8}$, vì phép nhân của người Ai Cập dựa trên việc nhân đôi và chia đôi các phân số), đây chính là hệ số tỷ lệ cần áp dụng. Vậy nên 7 (giá trị "sai" ban đầu) sẽ được nhân với $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ (hệ số tỷ lệ) cho ra kết quả $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ (hay $16\frac{5}{8}$).

Nhiều bài toán trong cuộn giấy Rhind yêu cầu chia phần nguyên liệu hoặc đất đai. Bài toán 41 hỏi thể tích của một thùng chứa hình trụ đường kính 9 cubit và chiều cao 10 cubit. Cách giải là tính diện tích hình vuông có chiều dài cạnh bằng $\frac{8}{9}$ đường kính, sau đó nhân diện tích này với chiều cao. Người ta ước lượng nếu vẽ một hình tròn bên trong một hình vuông thì diện tích hình tròn sẽ chiếm khoảng $\frac{8}{9}$ diện tích hình vuông nên đã sử dụng số $\frac{8}{9}$. Phương pháp này cũng được sử dụng trong bài toán 60 để tìm diện tích của một hình tròn: trừ $\frac{1}{9}$ đường kính của hình tròn, và tìm diện tích của hình vuông bằng chiều dài cạnh vừa tính được.

Độ chính xác

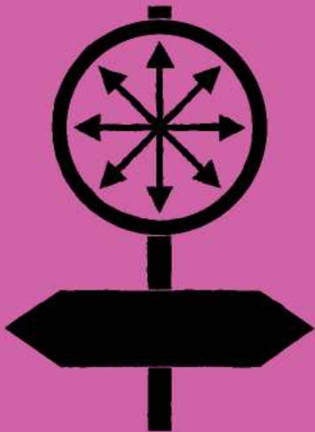
Kể từ thời Hy Lạp cổ, người ta đã tính được diện tích hình tròn bằng cách nhân bình phương bán kính (r^2) với số pi (π), viết tổng quát là πr^2. Người Ai Cập cổ không có khái niệm pi, nhưng các phép tính trong cuộn giấy Rhind cho thấy họ cũng tìm ra số gần đúng. Cách tính diện tích hình tròn của họ – với đường kính hình tròn bằng hai lần bán kính (2r) – có thể được viết thành $(\frac{8}{9} \times 2r)^2$, rút gọn là $\frac{256}{81}r^2$, với $\frac{256}{81}$ thay cho pi. Dưới dạng số thập phân, số này lớn hơn giá trị thật của pi khoảng 0,6%. ■

Các sách hướng dẫn

Cuộn giấy Rhind và Moscow là những bản văn toán học hoàn chỉnh nhất từ đỉnh cao của thời kỳ văn minh Ai Cập còn tồn tại. Chúng được sao lại vô cùng cẩn thận bởi các thư lại thành thạo về số học, hình học và đo lường, dường như các bản văn này cũng được dùng để đào tạo những thư lại mới. Mặc dù chứa đựng những kiến thức toán học có lẽ là cao cấp nhất của thời kỳ đó, song các bản văn này không được xem là tác phẩm của giới học giả. Thay vào đó, chúng là sổ tay hướng dẫn để sử dụng trong thương mại, kế toán, xây dựng và các hoạt động khác liên quan đến đo lường và tính toán.

Chẳng hạn, các kỹ sư Ai Cập đã sử dụng toán học để xây kim tự tháp. Cuộn giấy Rhind có một phương pháp tính độ dốc của kim tự tháp bằng cách sử dụng *seked* – đơn vị đo khoảng cách theo bề ngang mà mặt nghiêng trượt qua với mỗi 1 cubit theo chiều dọc. Sườn kim tự tháp càng dốc thì càng ít *seked*.

Cuộn giấy Rhind sử dụng hệ chữ Ai Cập thầy tu để viết số. Kiểu chữ thảo này gọn và thực tế hơn việc phải vẽ các chữ tượng hình phức tạp.



TỔNG BẰNG NHAU THEO MỌI HƯỚNG

MA TRẬN KỲ ẢO

BỐI CẢNH

NỀN VĂN MINH TIÊU BIỂU
Trung Hoa cổ đại

LĨNH VỰC
Lý thuyết số

TRƯỚC ĐÓ
Thế kỷ IX TCN *Kinh Dịch* của Trung Hoa viết về bát quái và 64 quẻ sử dụng trong bói toán.

SAU ĐÓ
1782 Leonhard Euler viết về các ô vuông Latinh trong cuốn *Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques* (*Nghiên cứu về một kiểu ma trận mới*).

1979 Công ty Dell Magazines ở New York xuất bản ấn phẩm giải câu đố kiểu Sudoku đầu tiên.

2001 Kỹ sư điện tử người Anh Lee Sallows sáng chế ra ma trận kỳ ảo có tên "ma trận hình học", gồm các hình trong hình học thay cho số.

Một ma trận kỳ ảo là một **bảng các ô vuông** – ba nhân ba hoặc nhiều hơn – trong đó mỗi ô chứa một số nguyên khác nhau.

Trong mỗi **hàng, cột, và đường chéo**, tổng của các số **đều bằng nhau**.

Tổng này gọi là **hằng số kỳ ảo**.

Có hàng ngàn cách để sắp xếp các số từ 1 đến 9 vào bảng ba nhân ba ô vuông. Nhưng chỉ có tám cách để tạo ra một ma trận kỳ ảo, trong đó tổng của các số ở mỗi hàng, cột và đường chéo – hằng số kỳ ảo – đều bằng nhau. Tổng của các số từ 1 đến 9 là 45, cũng là tổng của cả ba hàng hoặc ba cột. Do đó, hằng số kỳ ảo là $\frac{1}{3}$ của 45, tức là 15. Trên thực tế, thật sự chỉ có một cách kết hợp các số trong một ma trận kỳ ảo. Bảy cách còn lại chỉ là sự thay đổi vị trí luân phiên của cách này.

Nguồn gốc cổ đại

Ma trận kỳ ảo có lẽ là ví dụ xuất hiện sớm nhất về "toán vui". Không ai biết nguồn gốc chính xác của nó, nhưng ma trận kỳ ảo được đề cập lần đầu tiên trong huyền thoại về *Lạc Thư* (*Cuộn giấy sông Lạc*) của Trung Hoa, có từ năm 650 TCN. Theo huyền thoại, một con rùa đã xuất hiện trước vua Hạ Vũ khi ông gặp một trận lụt lớn. Các họa tiết trên mai của con rùa làm thành một ma trận kỳ ảo, với các số từ 1 đến 9 được viết dưới dạng các chấm tròn. Bởi vì huyền thoại này mà người ta tin rằng cách sắp xếp các số chẵn và lẻ (số chẵn luôn nằm ở bốn góc của ma trận) có tính mầu nhiệm và được dùng làm bùa may mắn qua bao đời.

Khi các ý tưởng từ Trung Hoa lan truyền dọc theo các con đường thương mại như Con đường Tơ lụa, các nền văn hóa khác cũng bắt đầu quan tâm đến ma trận kỳ ảo. Các bản văn Ấn Độ từ năm 100 đã

Xem thêm: Số vô tỉ 44–45 ▪ Sàng Eratosthenes 66–67 ▪ Số âm 76–79 ▪ Dãy Fibonacci 106–111 ▪ Tỷ lệ vàng 118–23 ▪ Số nguyên tố Mersenne 124 ▪ Tam giác Pascal 156–161

Một ma trận kỳ ảo bậc bốn xuất hiện bên dưới chiếc chuông trong bức *Melencolia I* của họa sĩ người Đức Albrecht Dürer được tinh tế chạm trổ thêm năm sáng tạo 1514.

viết về ma trận kỳ ảo, và sách bói toán *Brihat-Samhita* (kh.550) mô tả ma trận kỳ ảo đầu tiên được ghi nhận ở Ấn Độ, được dùng để đong nước hoa. Vào thế kỷ XIV, các học giả Ả Rập, những người có vai trò kết nối quan trọng giữa việc học hỏi các nền văn minh cổ đại và phong trào Phục hưng châu Âu, đã du nhập ma trận kỳ ảo vào châu Âu.

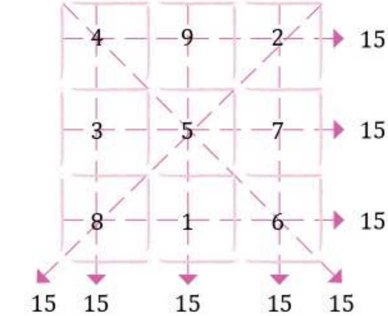
Kích thước khác nhau của các ma trận

Số hàng và cột của một ma trận được gọi là bậc của ma trận. Chẳng hạn, một ma trận ba nhân ba được gọi là ma trận bậc ba. Không tồn tại ma trận bậc hai vì ma trận này chỉ đúng nếu tất cả các số đều giống nhau. Bậc càng cao thì số lượng cách sắp xếp ma trận càng lớn. Bậc bốn tạo ra 880 cách sắp xếp ma trận – với hằng số kỳ ảo bằng 34. Có hàng trăm triệu cách sắp xếp ma trận bậc năm, còn ma trận bậc sáu thì nhiều cách sắp xếp tới mức người ta vẫn chưa tính ra.

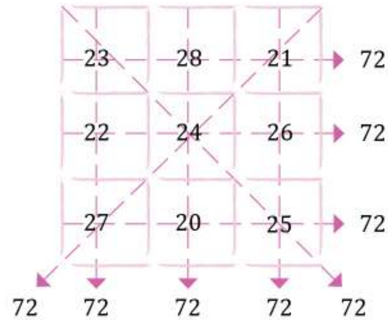
Ma trận kỳ ảo đã luôn là nguồn vui không dứt cho các nhà toán học. Nhà toán học người Ý thế kỷ XV Luca Pacioli, tác giả cuốn *De viribus quantitatis* (*Về lũy thừa*), đã tập hợp các ma trận kỳ ảo. Vào thế kỷ XVIII, Leonhard Euler ở Thụy Sỹ cũng thích thú với ma trận kỳ ảo và đã tạo ra một dạng ma trận mà ông gọi là các hình vuông Latinh. Các hàng và cột trong một hình vuông Latinh chứa các hình vẽ hoặc biểu tượng chỉ xuất hiện một lần trong mỗi hàng và cột.

Sudoku – một phiên bản của hình vuông Latinh – đã trở thành trò chơi giải đố phổ biến. Ra đời ở Mỹ vào thập niên 1970 với cái tên Xếp số, đến thập niên 1980 Sudoku đã sang Nhật Bản và được đặt cho cái tên hiện nay, có nghĩa là "các số có một chữ số". Sudoku là hình vuông Latinh chín nhân chín được bổ sung nguyên tắc rằng mỗi ma trận nhỏ bên trong cũng đều phải chứa tất cả chín số. ■

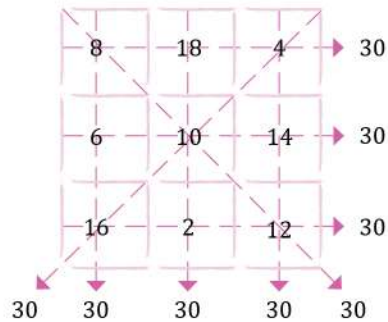
> Ma trận nhiệm mầu tuyệt vời nhất so với bất kỳ ma trận kỳ ảo nào từng được một ảo thuật gia tạo ra.
>
> **Benjamin Franklin**
>
> **Nói về một ma trận kỳ ảo mà ông đã giải ra**



Ma trận kỳ ảo Lạc Thư có hằng số kỳ ảo bằng 15.



Ở đây, mỗi số trong ma trận Lạc Thư được cộng thêm 19; hằng số kỳ ảo là 72.



Ở đây, tất cả các số trong ma trận Lạc Thư được nhân đôi; hằng số kỳ ảo là 30.

Khi đã có một ma trận kỳ ảo, bạn có thể cộng một lượng bằng nhau vào mỗi số trong ma trận mà vẫn giữ nguyên được ma trận kỳ ảo. Tương tự, nếu bạn nhân tất cả các số với lượng bằng nhau thì ma trận kỳ ảo của bạn vẫn giữ nguyên.

SỐ LÀ LÝ TƯỞNG CỦA THẦN LINH

PYTHAGORAS